

Mathématiques I

Numéro d'inventaire : 2025.0.98

Auteur(s) : Michel Quellier

Type de document : travail d'élève

Période de création : 3e quart 20e siècle

Date de création : 1956-1957

Matériau(x) et technique(s) : papier vergé | plume de métal

Description : Cahier à couverture cartonnée verte. Reliure métallique en spirale. Régure petits carreaux 5 x 5 mm sans marge. Pontuseaux verticaux et vergeures horizontales.

Mesures : hauteur : 27 cm ; largeur : 21 cm

Notes : Il s'agit du cahier de Mathématiques de Michel Quellier, élève en classes préparatoires Mathématiques spéciales (seconde année de la filière de classes préparatoires aux grandes écoles ou CPGE), scolarisé au lycée Pothier d'Orléans durant l'année 1956-1957, dans la perspective du passage du concours de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris.

Contenu (en sommaire dans les dernières pages du cahier) Les nombres irrationnels :

Coupure ; opération Analyse combinatoire : Formule de binôme ; Formule de Leibnitz Limites :

Fonction continue ; Fonction exponentielle ; Fonction logarithme ; Fonction puissance ;

Infiniment petit - Infiniment grand ; équivalence ; Parties principales Nombres complexes :

Racine n ième ; Formule de Moivre Division des polynômes : PGCD ; PPCM Déterminants :

Matrices ; Système d'équations linéaires ; Formes linéaires Vecteurs : Produit scolaire ;

Trigonométrie sphérique ; Produit vectoriel ; Produit mixte ; Barycentre ; Changement de

coordonnées ; Champs linéaires de vecteurs ; Espaces à n dimensions Géométrie analytique :

La droite dans le plan ; Plan dans l'espace ; Cercle dans le plan ; Transformations planes

usuelles ; Sphère ; Cercle dans l'espace ; Coordonnées homogènes ; Eléments imaginaires ;

Droite isotrope ; Points cycliques Dérivée de l'exponentielle et du logarithme Fonctions

inverses : Arc $\sin x$; Arc $\cos x$; Arc $\tan x$; Lignes hyperboliques Fonction $y = f(x)$: Théorème de

Rolle des accroissements finis ; Formule de Taylor ; Maclaurin ; Règle de L'Hôpital

Développements limités Equations algébriques $f(x) = 0$: Théorème de d'Alembert - racines

multiples ; Fonctions symétriques ; Elimination ; Racine commune ; Racine double ; Equations

réciroques ; Résolution de $x^3 + px + y = 0$; Théorème de Descartes Décomposition des

fractions en éléments simples Fonction de plusieurs variables : Dérivées - Continuité ;

Théorème des fonctions composées ; Théorème des accroissements finis ; Formule de Taylor

; Forme polaire Fonctions homogènes : Formule d'Enler ; Fonctions implicites ; Maxima et

minima d'une fonction de plusieurs variables Différentielles : Changement de variable ;

Courbes paramétriques ; Courbes gauches ; Coordonnées polaires ; Courbes définies par une

équation implicite $f(x,y) = 0$ Lieux géométriques dans le plan

Mots-clés : Calcul et mathématiques

Lieu(x) de création : Orléans

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Paginé

Commentaire pagination : 190 p. dont 183 p. manuscrites

Les Nombres irrationnels

Corps de nombres : famille de nombres qui se prêtent à des opérations donnant des nombres du même corps

- Principaux corps
- entiers positifs : se prêtent à l'addition, à la multiplication et qqfois à la soustraction et à la division
 - entiers positifs et négatifs : se prêtent en plus tjrs à la soustraction et qqfois à la division
 - rationnels, de la forme $\pm \frac{p}{q}$: se prêtent à la puissance mais pas tjrs à l'extraction de racine

Représentation

Sur un axe on peut représenter les nbres rationnels mais il y a des points qui ne sont pas représentés.



- x On appelle nbre réel, tout symbole qui sera capable de définir un point de l'axe
- x Les nombres rationnels sont un cas particulier des nombres réels; les conventions seront identiques à celles des nombres rationnels
- x Si un nbre x rationnel ou irrationnel représente le point M et si le nbre x' représente le nbre M' , on dira que x' est plus grand que x si M' est à droite de M
- x En mettant les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$ bout à bout on obtient un point M'' représentant le nbre x'' et $x'' = x + x'$
- x Le nbre $x' - x$ est représenté par le vecteur $\vec{MM'}$

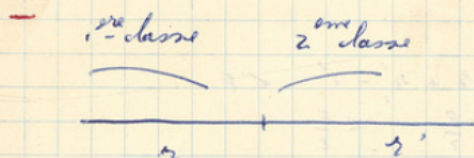
Définition d'un nombre réel par une coupure

Si on partage l'ensemble des nombres irrationnels en 2 classes :

= tel que ts les nbres soient classés

= et tel que tt nbre de la 1^{ère} classe soit inférieur à tt nbre de la 2^{ème} classe

On peut affirmer qu'il existe un nbre x et un seul qui soit à la fois supérieur ou égal à tous les nbres de la 1^{ère} classe et $\leq$ à tous les nbres de la 2^{ème} classe



Le domaine occupé par x est à gauche du domaine occupé par x' .

Ils ne se chevauchent pas car un nbre x' serait $<$ à un nbre x

Ils sont donc séparés par un point ou un segment

Or l'hypothèse du segment est fautive car il y aurait des nbres non classés.

Ce point unique M définit un nombre x qui par définition

$$\begin{aligned} &\geq r \\ &\text{et} \leq r' \end{aligned}$$

- La différence entre une coupure définissant un nbre irrationnel et celle définissant un nbre rationnel est que si elle définit

en nbre rationnel, celui est classé. Ce nbre est donc le plus de la 1^{ère} classe ou le plus petit de la 2^{ème} classe.

$$\begin{array}{l} r \leq 0 \\ r' \geq 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{définissent} \\ \text{le nombre zéro} \end{array} \right.$$

Coupure restreinte

Une coupure restreinte est définie par 2 ensembles de nombres réels x et x' , on n'impose pas à x les nombres d'être classés

- Tout nombre x plus petit que tout nombre x'
- $x' - x$ peut être rendu inférieur à tout nombre positif donné
- Il existe un nombre réel et un seul x qui est supérieur ou égal à tous les x et inférieur ou égal à tous les x'

M se déplaçant de gauche à droite aussi longtemps qu'il rencontre des points du 1^{er} ensemble

M' se déplaçant de droite à gauche dans le 2^{ème} ensemble.

M et M' ne se rencontreront pas, s'ils se croiseraient on aurait $x' < x$ contraire à l'hypothèse. Les 2 ensembles sont donc séparés par un point ou par un segment où il n'y aurait ni x ni x'

donc dans ce cas $x' - x > \epsilon$ à la longueur du segment

Donc les 2 ensembles sont séparés par un point P .

- Parmi les coupures restreintes il y a les approximations décimales
- On n'oblige pas tous les nbres à être classés

Opérations

Graphiquement addition et soustraction.

Addition Etant donné deux nombres réels x et x' , le premier défini par r et r_1 , le 2^{ème} par r' et r'_1 , $\left\{ \begin{array}{l} r_1 - r \\ r'_1 - r' \end{array} \right\}$ peut être rendu inférieur à ϵ donné

tous les nombres $r + r'_1$ et $r_1 + r'$ forment 2 nouveaux ensembles définissant une coupure $r + r' < r_1 + r'_1$

$$\text{et } r_1 r'_1 - (r + r') = r_1 - r + r'_1 - r' < \epsilon$$

Cette coupure définit $x + x'$

$$< \frac{\epsilon}{2} \quad < \frac{\epsilon}{2}$$

Produit (nbres positifs)
 r, r' et r_1, r'_1 définissent une coupure

Racine p^{ème} d'un nombre positif

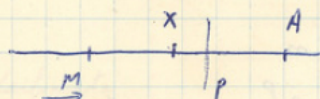
$$\sqrt[p]{x}$$

nombre $r^p \leq x$ et $r'^p > x$ coupure définissant $\sqrt[p]{x}$

Étant donné un ensemble de nombres réels x on dit que cet ensemble possède un nombre majorant A si tous les nombres de l'ensemble sont $\leq A$.

De même un ensemble donné possède un nombre minorant B si tous les nombres de cet ensemble sont $\geq B$.

Étant donné un ensemble possédant un nombre majorant A , on peut trouver un nombre X qui est également majorant et tel qu'il existe un x au moins supérieur à $X - \epsilon$ aussi petit que soit ϵ .



M se déplaçant de gauche à droite aussi longtemps qu'il rencontre les nombres x .

Un autre point partant de A vers la gauche aussi longtemps qu'il ne rencontrera pas de x .

ona la définition d'encadrement.

X est le nbre majorant le plus petit possible.

On l'appelle la borne supérieure stricte de l'ensemble (zéro est le nombre majorant des nombres ≤ 0).

Il peut arriver que la borne appartienne ou non à l'ensemble.

Même propriété avec le minorant.