

## Concours PEGC

**Numéro d'inventaire** : 2024.0.179

**Auteur(s)** : Evelyne, Hélène, Marie-Louise Jaouën

**Type de document** : travail d'élève

**Période de création** : 4e quart 20e siècle

**Date de création** : 1976

**Matériau(x) et technique(s)** : papier | encre noire

**Description** : Deux copies doubles d'examen à simple lignage avec rabat supérieur droit à replier et coller pour la conservation de l'anonymat.

**Mesures** : hauteur : 29,5 cm

largeur : 21,5 cm

**Notes** : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), de la candidate Evelyne Jaouën. L'auteur est alors élève en catégorie 3, section 3. L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à l'Ecole Normale des Filles de Rouen. L'épreuve se déroule le matin du 21 septembre 1976. La note obtenue est de 16/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 08/20.

**Mots-clés** : Compositions et copies d'examens

Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire

**Lieu(x) de création** : Rouen

**Autres descriptions** : : Français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 8 p.

ACADEMIE EXAMEN Concours BEC  
DE ROUEN 1976

Session de Septembre 1976

SERIE

Composition de Mathématique.

| NOTE (1)<br>de 0 à 20 | COEFF. | NOTE DEFINITIVE |
|-----------------------|--------|-----------------|
| <u>16,5</u>           |        |                 |

Ne pas oublier de remplir l'en-tête et le talon ci-dessus.  
Il est interdit de signer à la fin de la composition.

Nom : JAOUËN  
Prénoms : Eveline, Hélène, Marie-Louise  
Date de naissance : 15 Janvier 1956  
N° d'inscription : 19  
Centre des épreuves : Rouen

APPRECIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFREE :

SEANCE  
DU 19  
(matin ou soir)

Nom du Professeur (en lettres capitales)

Signature :

Exercice n° 1. Soit  $E$  et  $F$  2 ensembles, et soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .  
1. la proposition suivante :  $\forall A' \in \mathcal{P}(F) \quad \forall B' \in \mathcal{P}(F) \quad \forall f \in \mathcal{F}$

$$f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

est vraie.

Démonstration :

Soient  $A'$  et  $B'$ , deux parties quelconques de  $F$  et soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

Soit  $x$  un élément de  $E$ . Et supposons que  $x \in f^{-1}(A' \cap B')$

ceci signifie que  $f(x) \in A' \cap B'$ , ou encore :  $f(x) \in A'$  et  $f(x) \in B'$

ceci est équivalent à  $x \in f^{-1}(A')$  et  $x \in f^{-1}(B')$

c'est-à-dire  $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ .

$$\forall x \in E \quad x \in f^{-1}(A' \cap B') \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

$$\text{d'où } f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B').$$



4. la proposition  $[\forall A \in \mathcal{G}(E) \forall B \in \mathcal{G}(E) \exists f \in \mathcal{F}$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \text{ est vraie.}$$

Soient 2 parties  $A$  et  $B$  quelconques de  $E$ . Et soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  injective.

Soit  $y \in F$ . Supposons  $y \in f(A) \cap f(B)$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \ y = f(x)) \text{ et } (\exists x' \in B, y = f(x'))$$

mais par hypothèse  $f$  est injective donc  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ .

donc  $\exists x \in E, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } f(x) = y$ .

$$\Leftrightarrow y \in f(A \cap B).$$

$$\text{Donc } f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

Soit maintenant  $y \in f(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B \ y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \ y = f(x) \text{ et } \exists x \in B \ y = f(x)$$

ceci est équivalent à  $y \in f(A) \text{ et } y \in f(B)$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

$$\text{donc } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

On a démontré la proposition.

5. la proposition  $\forall A \in \mathcal{G}(E) \forall f \in \mathcal{F} \ f^{-1}(f(A)) = A$  est fausse.

Soit  $A \in \mathcal{G}(E)$  soit  $f$  non injective de  $E$  vers  $F$ . Soit  $x \in E$ .

Supposons ~~soit~~  $x \in f^{-1}(f(A))$

$$\text{ceci est équivalent à } f(x) \in f(A)$$

$$\Leftrightarrow \exists x' \in A \ f(x') = f(x).$$

mais puisque  $f$  n'est pas injective, cela n'implique

pas forcément que  $x' = x$  donc

$x$  peut très bien ne pas appartenir à  $A$ .



Exercice 1:  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

$(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $V$ .

on a

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$1_V$  est l'endomorphisme identité de  $V$  dont la matrice représentative

de  $(e_1, e_2, e_3)$  est:  $M(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\lambda 1_V$  est un endomorphisme de  $V$  de matrice:  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et  $\mu - \lambda 1_V$  est un endomorphisme de  $V$  de matrice:

$$M(\mu - \lambda 1_V) = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Il existe au moins un vecteur non nul  $x$  tel que  $(\mu - \lambda 1_V)^3(x) = 0$

si et seulement si  $\mu - \lambda 1_V$  n'est pas injective

c'est-à-dire si et seulement si le déterminant de  $M(\mu - \lambda 1_V)$  est

nul.

$$\text{on a } \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |M(\mu - \lambda 1_V)| = (1-\lambda)^3$$

$$\Leftrightarrow |M(\mu - \lambda 1_V)| = 0$$

donc le déterminant est nul si et seulement si  $\lambda = 1$ .

$\lambda$  est unique, appelons-le  $\lambda_0$ .

on pose  $W = \mu - \lambda_0 1_V$

e. On veut que la dimension de  $\ker(W)$  est égale à

$$\dim(V) - \text{Rang}(W) =$$

