

PEG

Numéro d'inventaire : 2024.0.166

Auteur(s) : Marie-Madeleine Boitard

Type de document : travail d'élève

Période de création : 4e quart 20e siècle

Date de création : 1975

Matériau(x) et technique(s) : papier | encre noire

Description : Trois copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.

Mesures : hauteur : 31,1 cm

largeur : 24 cm

Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), de la candidate Marie-Madeleine Boitard. La spécialité de l'élève est Mathématiques-Sciences-physiques, section 3 (probablement en bac C). L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à la préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en mai 1975. La note obtenue est de 00/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 07/20. La copie a été sujette à un commentaire du correcteur.

Mots-clés : Compositions et copies d'examens

Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire

Lieu(x) de création : Rouen

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 12 p. dont 9 p. manuscrites

Nom et Prénom : BOITARD Marie Madeleine.

N° d'inscription : 176

Centre d'examen : Préfecture.

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Examen : PEG.

Session :

Spécialité ou Série : Mathématiques. Physique.

Si votre composition
comporte plusieurs
feuillets.

numérotez-les 1/3

Note :

0

20

Composition de Mathématiques.

Aucune méthode véritablement mathématique
n'est mise en jeu

II^e problème

1^{re} partie

Soit h l'application $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{x}{x+3}$$

1°) Montrons que

$$\forall x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1] \\ \text{on a } |h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{3} |x - y|$$

$$h(x) = \frac{x}{x+3}$$

$$h(y) = \frac{y}{y+3}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{x}{x+3} - \frac{y}{y+3} = \frac{x(y+3) - y(x+3)}{(x+3)(y+3)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{3(x-y)}{(x+3)(y+3)}$$

$$\frac{h(x) - h(y)}{x-y} = \frac{3}{(x+3)(y+3)}$$

si x et y tendent vers 0 alors $\frac{3}{(x+3)(y+3)} \sim \frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$.

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

Ce qui nous donne.

$$\left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{et } |h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{3} |x - y|$$

2°) Montrons que $h[0,1] \subset [0,1]$.

$$\text{pour } x = 0 \Rightarrow h(x) = \frac{x}{x+3}$$

$$h(0) = \frac{0}{0+3} = 0.$$

$$\text{pour } x = 1 \Rightarrow h(1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$$

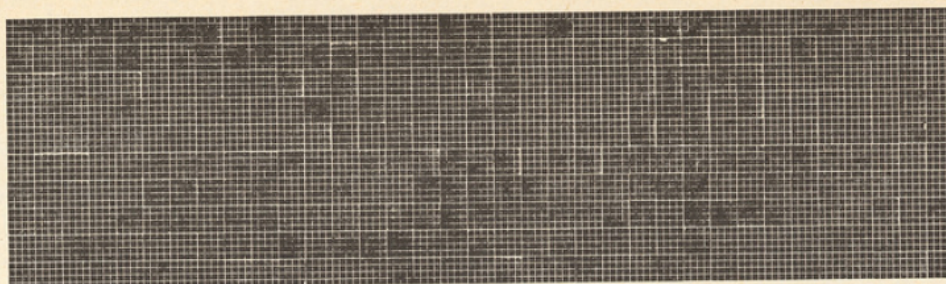
$$\text{si } x = 0,2 \Rightarrow h(0,2) = \frac{0,2}{0,2+3} = \frac{0,2}{3,2} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0,06.$$

on constate que pour ~~qu'importe quelle valeur de~~ $x \in [0,1]$
 $h(x)$ reste inférieur à $\frac{1}{4}$ et supérieur à 0.

$$\text{donc } h[0,1] = [0, \frac{1}{4}]$$

$$\text{et par suite } [0, \frac{1}{4}] \subset [0,1]$$

3°) soit $a \in [0,1]$ et $n \mapsto x_n$
une suite avec $x_0 = a$
 $x_{n+1} = h(x_n).$



Nous savons que $|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|$.

si $h(x)$ est remplacée par $h(x_n)$.

$$x_{n+1} = h(x_n) = \frac{x_n}{x_n + 3}$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 3}.$$

$$\text{On a } x_1 = \frac{x_0}{x_0 + 3}.$$

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1 + 3} = \frac{x_0}{(x_0 + 3)} \times \left[\frac{x_0}{x_0 + 3} + 3 \right] = \frac{x_0}{x_0 + 3(x_0 + 3)}$$

$$x_2 = \frac{x_0}{4x_0 + 9}.$$

$$x_3 = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \frac{x_0}{4x_0 + 9} \times \left[\frac{x_0}{4x_0 + 9} + 3 \right] = \frac{x_0}{x_0 + 12x_0 + 27}$$

$$x_3 = \frac{x_0}{13x_0 + 27}.$$

$$x_4 = \frac{x_0}{13x_0 + 27} \times \left[\frac{x_0}{13x_0 + 27} + 3 \right] = \frac{x_0}{x_0 + 39x_0 + 81} = \frac{x_0}{40x_0 + 81}$$

$$x_n = \frac{x_0}{\frac{3^n - 1}{2}x_0 + 3^n}$$

$$\text{et } x_{n+1} = \frac{x_n}{\frac{3^n - 1}{2}x_n + 3^n}$$

