PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.165
Auteur(s) : Philippe Mileo
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1975
Matériau(x) et technique(s) : papier | encre noire
Description : Trois copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Philippe Mileo. La spécialité de l'élève est Mathématiques-Sciences-physiques, section 3 (probablement en bac C). L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à la préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en mai 1975. La note obtenue est de 07/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 07/20.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 12 p. dont 9 p. manuscrites

Nom et Prénom : MILEO Philippe

N° d'inscription : 201.

Centre d'examen : Préfecture.

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Note : 07 / 20

Examen : P.E.G.C

Session : Mai

Spécialité ou Série : Section III

Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les 1/3.

Composition de Mathématiques

2ème Problème.

1°/ Partie, 1ère Question :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall y \in [0, 1].$$

$$|(f(x) - f(y))| = \left|\frac{x}{x+3} - \frac{y}{y+3}\right|$$

$$= \left|\frac{3x - 3y}{(x+3)(y+3)}\right|$$

$$= \frac{3}{9}\left|\frac{x - y}{(\frac{x}{3}+1)(\frac{y}{3}+1)}\right|.$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{x - y}{(\frac{x}{3}+1)(\frac{y}{3}+1)}\right|.$$

or on pose $A = (\frac{x}{3}+1)(\frac{y}{3}+1)$ A est positif.

on obtient l'égalité : $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3}|x-y| \times \frac{1}{A}$

1

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|$ C.Q.F.D.

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

[redacted]

0,5

2ème Question : $\forall x \in [0, 1]$. $h(x) = \dfrac{x}{x+3}$

$h(x)$ est donc positif : $h(x) \geqslant 0$.
Or par définition de $h(x)$ on a aussi $x \geqslant h(x)$.
en effet $x \geqslant \dfrac{x}{x+3}$.

d'où $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} h(x) \geqslant 0. \\ h(x) \leqslant 1. \end{cases}$

d'où $h[0, 1] \subset [0, 1]$.

C.Q.F.D.

3ème Question : Démonstration par récurrence :

$n = 1$. $|x_2 - x_1| = |h(x_1) - h(x_0)|$

$|h(x_1) - h(x_0)| \leqslant \frac{1}{3} |x_0 - x_1|$ (1ère Question).

$\Rightarrow |x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{3} |x_0 - x_1|$.

La formule est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons la vraie pour n : $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{3^n} |x_0 - x_1|$.

Démontrons la pour $n+1$.

$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |h(x_{n+1}) - h(x_n)| \leqslant \frac{1}{3} |x_{n+1} - x_n|$

D'après la 1ère Question,

[redacted]

d'où

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{3} |x_{n+1} - x_n|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} |x_0 - x_1|$$

d'après la supposition faite pour n.

$$\Leftrightarrow \quad |x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{3^{n+1}} |x_0 - x_1|$$

La formule a donc été établi pour le rang n+1.
Donc elle vrai pour n quelconque.

1

5e Question :

$\forall n \quad x_{n+1} - x_n = h(x_n) - x_n$

$= \dfrac{x_n}{x_n+3} - x_n$.

or $\dfrac{x_n}{x_n+3} - x_n \leq 0$. $\Rightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0$.

$\Rightarrow \forall n \quad x_{n+1} \leq x_n$.

Donc la suite $n \longrightarrow x_n$ est décroissante.

Or $\forall n \quad x_n \in [0, 1]$. Démontrons le.

$x_0 = a$ avec $a \in [0, 1]$.
$x_1 = h(a) \Rightarrow x_1 \in [0, 1]$ d'après la 1e Question

supposons que $x_n \in [0, 1]$ on a $x_{n+1} = h(x_n) \Rightarrow x_{n+1} \in [0, 1]$
toujours d'après la 1ère question donc, par récurrence nous.