Entrée dans centre PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.134
Auteur(s) : Hervé Majorel
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1974
Matériau(x) et technique(s) : papier encre bleue
Description : Quatre copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Hervé Majorel. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques Physique et Technologie), catégorie 3 section 3. L'épreuve est une composition de mathématiques. Le centre d'examen est à la Préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en juin 1974. La note obtenue est de 10/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 03,8/20.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 16 p. dont 13 p. manuscrites

Nom et Prénom : MAJOREL Hervé

N° d'inscription : 220 Centre d'examen : Préfecture

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Note : 10/20

Examen : Entrée dans centre PEGC. Session : 1974

Spécialité ou Série : section III

Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les 1 / 4

Composition de

$h(x) = \text{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} + \text{Arcos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La fonction Arcsin est définie de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$
La fonction Arcos est définie de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$

D'où h sera définie pour

$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$

- $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \iff -(1+x^2) \leq 2x$ (car $1+x^2>0$)
  $\iff -1-x^2 \leq 2x$
  $\iff 0 \leq x^2+2x+1 \iff (x+1)^2 \geq 0$ toujours vérifié
- $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff 2x \leq 1+x^2 \iff 1+x^2-2x \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0$ toujours vérifié
- $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \iff -(1+x^2) \leq 1-x^2 \iff -1-x^2 \leq 1-x^2$
  $\iff -2 \leq 0x^2 = 0$ toujours vérif.

0,5

- $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff 1-x^2 \leq 1+x^2 \iff 0 \leq 2x^2$ toujours vérifié

Cette fonction est ~~déf~~ définie sur tout $\mathbb{R}$.

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

2) La fonction va être continue comme composée de fonctions continues

$x \mapsto 2x$ $\quad$ $x \mapsto 2x$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ | ces 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continue.

La fonction Arcsin est continue. Or la composée de (pons) de 2 fonctions continues est continue $\Rightarrow$ ~~f(x)~~ : $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2}$ est continue

De même pour $\mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La somme de 2 fonctions continues est continue $\Rightarrow$ h est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3) Posons $f(x) = \mathrm{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2}$ $\quad$ & $g(x) = \mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$

. la fonction f est une fonction impaire $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$

. la fonction g est une fonction paire $(g(x) = g(-x)) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

~~qd x → +∞~~ $\cancel{\lim \frac{2x}{1+x^2} = \lim \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x}} = 0$ $\quad \frac{2x}{1+x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{x}$

D'où $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} \sim \lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{Arcsin}\,\frac{2}{x} = 0 + k\pi$ $\quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} = 0 + k'\pi$ $\quad$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

• $\lim \frac{1-x^2}{1+x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{Arccos}(-1) = \pi + 2d\pi \quad d \in \mathbb{Z}$

$= (2d+1)\pi$

d'où : $\lim\limits_{x \to \infty} \text{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi + 2d\pi = (2d+1)\pi$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b\pi + (2d+1)\pi$

$= (2d+b+1)\pi$

$= \boxed{\mu\pi} \qquad \mu \in \mathbb{Z}$

De même pour $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ b est remplacé par b' et μ par μ' $\qquad \mu' \in \mathbb{Z}$

2) . La fonction dérivée de Arcsin y : $\frac{+1}{\sqrt{1-y^2}}$

Elle est donc définie uniquement si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ existe et si $1-y^2 \geq 0$

Ici $\quad 1-y^2 = 1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$

qui est toujours défini et $\geq$ mais $\neq 0$ que pour $x \neq \pm 1$.

. La dérivée de Arccos y est : $-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

défini si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ existe, $1-y^2 > 0$ $\quad 1-y^2 = 1 - \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$ $\neq 0$ somme de 2 nombres positifs
toujours vérifié dans $\mathbb{R}$

$\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{(1+x)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$

$1-y^2$ est défini car $(1+x^2)$ toujours $\neq 0$. $\quad 4x^2 \geq 0 \qquad 4x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

1

$D(h) = \mathbb{R} - \{-1, 0, +1\}$