Mécanique

Numéro d'inventaire : 2015.8.5612
Type de document : travail d'élève
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1901
Matériau(x) et technique(s) : papier ligné, papier vergé, papier cartonné
Description : Cahier agrafé, couverture en papier cartonné orange, impression en noir, 1ère de couverture avec en haut à gauche la même signature manuscrite plusieurs fois, à droite le titre à l'encre noire, au centre une grande illustration représentant Du Guesclin avec son nom imprimé dessous. Réglure de petits carreaux, encre bleue, noire, rose.
Mesures : hauteur : 22 cm ; largeur : 17,4 cm
Notes : Cahier de cours de mécanique rationnelle: vecteurs et systèmes de vecteurs, compléments de cinématique, force vive.
Mots-clés : Mécanique (comprenant la dynamique des fluides)

Méca Rationnelle (1

Giraud
le 24/12

Introduction

Ch. 1
~ Vecteurs et systèmes de vecteurs. –

13.11

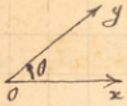
Définition. si le vecteur a une origine bien déterminé : vecteur libre.
si au contraire le pt d'application est arbitraire sur le support du vecteur : on dit que c'est un ~~vecteur~~ glissant. Enfin si le point d'application est tout à fait arbitraire, la grandeur la direction et le sens de ce vecteur étant bien déterminées, on dit que l'on a affaire à un vecteur libre : corps animé d'un mouvement de transl. tous les points ayant au même instant même vitesse.

Somme géométrique de vecteurs : c'est un vecteur libre.

Produit d'un vecteur par un nombre. Les deux vecteurs $\vec{V}$ et $m\vec{V}$ sont portés par des droites parall. le rapport de leurs longueur étant $|m|$ et le sens étant le même si $m > 0$, sens contraire si $m < 0$. $m = -1$: couple. vecteurs opposés.

Produit de vecteurs : les vecteurs sont considérés comme libres. deux façons.
{ Scalaire $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ le résultat du produit est un nombre
{ Vectoriel $V_1 \wedge V_2$. le résultat est un vecteur

Scalaire : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 \cdot V_2 \cos\theta$ θ est l'angle des vecteurs.



en mesurant les vecteurs sur deux axes on a aussi le produit des mesures algb. multiplié par le cosinus de l'angle des direct. > 0 des axes.
$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ = produit alg. de l'un des vecteurs par la proj. de l'autre sur lui. Conséquence : si $\vec{V_1} = \vec{V'_1} + \vec{V''_1}$. le produit scalaire est distributif.
$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V'_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V''_1} \cdot \vec{V_2}$.
si les axes étant rect. les deux vect. ont pour compts resp. $X_1 Y_1 Z_1$ $X_2 Y_2 Z_2$
la valeur du produit scalaire : $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$.
Le produit scal. est indt de l'ordre des facteurs.

Vectoriel : on ne peut le définir que si l'on a choisi un sens > 0 de rotation. sa nature est ≠ de ceux dont nous partons. D'où la distinction entre vecteur polaire et axial.
Un vecteur polaire est un vecteur dont la déf. ne dépend pas du sens de rotation ; le vecteur axial en dépend : tels sont le vectoriel, le

18

on fait la somme : $\mathcal{M}^t_{o'} = \mathcal{M}^t_o + \mathcal{M}^t_{o'}, \overrightarrow{OR}$ $\overrightarrow{OR}$ étant la résultte du torseur en O.

$$\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OG} + \mathcal{M}^t_{o'}, \overrightarrow{OR}. \quad (1)$$

car $M^t_{o'}, \vec{v}_1 + M^t_{o'}, \vec{v}_2 + \dots M^t_{o'}, \vec{v}_n = M^t_{o'}, \overrightarrow{OR}$ d'après le th. de Varignon

Étant donné un torseur quelque donnant en O le mt OG, et la résultante $\vec{V}$ en O, on a en O' le $M^t_{o'}$ donné par (1).

Conséquence : si deux torseurs ont même résultte et mt en un pt O, ils ont mm mt en tout pt de l'espace d'après la relation (1). Les deux torseurs sont alors dits équivalents.

Propriété fondamentale : définition des opérations élémentaires.

1°) faire glisser un vecteur sur sa ligne d'action

2°) remplacer plusieurs vecteurs ayt mm pt d'applicat. par leur résultante ou inversement ; ces opérat. élém. ne modifient ni la résultte ni le mt.

de sorte que deux torseurs tels que l'on passe de l'un à l'autre par des opérat élém. sont équivalents. Rt si deux torseurs sont éq^s on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires.

Si deux torseurs équivt T T' formés par les vect. $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ $\vec{v}'_1 \dots \vec{v}'_p$. Je pars du syst T, et par des opérat. élém. je passe à T' j'ajoute à T les vecteurs de T' et les vecteurs opposés $-\vec{v}'_1 \dots -\vec{v}'_p$. Je considère maintenant l'ensemble $T + (-T')$ c'est un torseur dt la résultte = 0, le mt est nul en tt pt.

On peut remplacer tous ces vecteurs par deux, par des opérations élémentaires, $\vec{v}_1$ et $-\vec{v}_1$ car leur résultte = 0 ; de + le mt/à l'origine de $\vec{v}_1$ de l'autre vecteur $-\vec{v}_1$ est nul, dc ces deux vect. st portés par la mm dte ; dc on peut leur donner le mm pt d'applicat. et les supprimer car leur résultte = 0. Il ne reste donc bien T'.

Dc en donnant la résultte et le mt OG en un pt on individualise une classe de torseurs tous équivalents, et il se trouve que ds la cinémat. et la statique ou la dynam. du corps solide, torseurs éq^s jouent le même rôle. Les élts $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OG}$ s'appellent élts de réduction du torseur au pt O.

Cas particuliers. 1°) vecteur unique $\vec{v}_1$ $\overrightarrow{OV} = \vec{v}_1$ et est ⊥ à $\overrightarrow{OG}$.

Invt tts les fois qu'un torseur donne une résultte ⊥ au mt résultant en un point, on pourra trouver un vect. unique = à la résultte et donnt le moment $\overrightarrow{OG}$. Équivce avec un vecteur unique que l'on sait construire. en tt pt O' de l'espace $\overrightarrow{O'G'}$ sera ⊥ à $\vec{V}$.

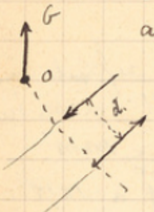
2°) couple. $\vec{V} = 0$ et un certain moment $\overrightarrow{OG}$; en un autre pt O' on a le mm momt $\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OG}$. indt du pt choisi.

Invt soit un torseur quelque dont la résultte = 0. Il est ~~soit~~ formé de 2 vect. constituant un couple. Soit en effet ~~OG~~ l'un des vecteurs du couple appliqué en O et ⊥t à OG, l'autre est connu en grandeur et/au pt O il doit avoir pr moment OG.

Quand $\vec{V} = 0$ le torseur équivaut à un couple.

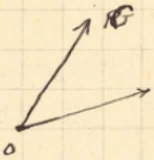
(5)

les vecteurs du couple sont indéterminés, mais l'un d'eux étant choisi, l'autre est dét. en grandeur direction et sens. (~~cont. libre~~) : les vecteurs sont ds un plan qq perp à au m^t résultt, leur dte d'action est arbitraire, pourvu qu'entre la distance de ces dtes d'action et l'intensité I de ces vecteurs on ait $I.d = \overline{OG}$ et le sens des vecteurs doit être tel que le sens de rotat. du couple soit > 0 autour de OG. (cas de la figure).



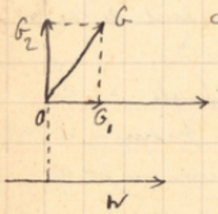
3°) $\vec{V} = 0$ $\vec{OG} = 0$ torseur eq^t à 0.

<u>Cas Général</u>. soit un torseur réduit en O, $\vec{OV}$ et $\vec{OG}$ les éléments de réduction, on peut le remplacer ~~evidt~~ par un vecteur et un couple. le vecteur $\vec{V}$ en O et le couple doit avoir pour m^t_O le vect. $\vec{OG}$



<u>Corollaire</u> la formule (1) donnant le $M^t_{O'}$ connt le M^t_O devient intuitive. Pr calculer le m$^t_{O'}$ je ~~remplace le système~~ prends $\vec{OG}$ alors le moment du couple $\vec{O'G'} = \vec{OG}$, + le m$^t_{O'}$ de la résultante $\vec{OV}$.

Parmi les réductions possibles d'un torseur à un vecteur et un couple, il en est de particult intéressantes : Projetons $\vec{OG}$ en $\vec{OG_1}$ sur $\vec{OV}$ je peux décomp. $\vec{OG}$ en deux vecteurs $\vec{OG_1}$, $\vec{OG_2}$, ce dernier étt $\perp \vec{OV}$. Je peux trouver un vecteur unique $\vec{W}$, égal à $\vec{V}$ et dont le m^t_O est $\vec{OG_2}$ le système est eq^t à ce vecteur $\vec{W}$ et à un couple de m^t $\vec{OG_1}$ (// à $\vec{W}$).



On peut donc remplacer le torseur par un vecteur unique convenablt placé égal à la résultte, et un couple dt le m^t à la direction de la résultte. Cela n'est possible que d'une manière.

~~La direction~~ Le support de $\vec{W}$ s'appelle l'axe central du torseur. Il est caractérisé par la prop^{té} géométrique suivante : prenons le m^t du système en un pt A de l'axe central, le m^t_A est $\vec{AG_1'}$, en un pt non sur l'axe central le m^t résultt n'est pas // à la résultte. donc l'axe central est le lieu des pts tels que le m^t résultant par rapp^t à ces pts ait même direction que la résultte gén^{le} du torseur.

Il n'y a pas d'axe central dans le cas d'un couple.

<u>Analytt</u> st 3 axes rect. et un torseur de résultte gé^{le} $\vec{V}$ (XYZ) et de m^t résultant à l'origine $\vec{OG}$ (LMN), l'axe central est tel que

$$\frac{L-(bZ-cY)}{X} = \frac{M-(cX-aZ)}{Y} = \frac{N-(aY-bX)}{Z}. \quad (2)$$

car le m$^t_{O'}$ de coord (abc) vaut
$$\begin{cases} L' = L-(bZ-cY) \\ M' = M-(cX-aZ) \\ N' = N-(aY-bX) \end{cases}$$

les coord. courantes sont abc dans (2).

Dans le cas d'un vecteur unique l'axe central est la dte qui porte ce vecteur, $\vec{OG_1}$ disparait.

<u>Coro. 2</u>. Projetons $\vec{OG}$ sur la résultte, on a un vecteur $\vec{OG'}$ de longueur c^{te} cad indt de la position de O, évident car c'est le m^t du couple obtenu en