Exercices de mathématiques

Numéro d'inventaire : 2015.8.4769
Auteur(s) : Pelletier
Type de document : travail d'élève
Période de création : 3e quart 20e siècle
Date de création : 1949 (entre) / 1952 (et)
Matériau(x) et technique(s) : papier ligné, carton
Description : Cahier agrafé, couverture verte, dos pelliculé noir, 1ère de couverture avec en haut à gauche une étiquette blanche à liseré bleu collée sur laquelle est manuscrit le nom de l'élève et "Ex. Math (classe)". Réglure seyes, encre bleue, noire, rouge, crayon de bois. 1 demi-feuille blanche insérée.
Mesures : hauteur : 22 cm ; largeur : 17 cm
Notes : Cahier d'exercices: fonctions linéaires, homographiques, équations paramétriques d'une hypocycloïde, barycentre, trigonométrie, suite de nombres complexes, dérivée d'une fonction, identité d'Euler, polynômes...
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Filière : Enseignement technique et professionnel
Autres descriptions : Nombre de pages : Non paginé.
Commentaire pagination : 114 p. manuscrites sur 122 p.
Langue : français.

Pelletier
454

AM Aix
151- 155

EXERCICES de MATHEMATIQUES

N° 1

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires forme un groupe relativement à l'opération consistant à prendre une fonction de fonction.

On a un groupe si dans un ensemble une opération interne a les trois propriétés :
1° Elle est associative
2° Elle a un élément neutre
3° Tout élément a un opposé.

Soient : V_1 : $y = ax + b$

V_2 : $z = cy + d$

F : $z = c(ax+b) + d$ fonction de fonction

Cette opération est interne car V_1, V_2, F sont des fonctions linéaires identiques.

Pour que cette opération forme un groupe il faut qu'elle soit

1° associative : $y = ax + b$
$z = cy + d$
$z = c(ax+b) + d$
$p = ez + f$

On peut passer de 1 à 2 ou de 1 à 3 sans rien changer

2° élément neutre : $z = y$

$y = ax + b \longrightarrow z = ax + b = y$
$z = cy + d \qquad y = cz + d$

FAUX

On retrouve la valeur de l'élément y donc $z = y$ est l'élément neutre.

3° Tout élément a un opposé

$y = ax + b$
$z = Ay + B$
$z = A(ax+b) + B = Aax + Ab + B$ ceci doit être $\equiv ax + b$
soit $ax(A-1) \equiv (1-A)b - B - Ab$
il faut $A = 1$ et $B = 0$:
d'où $z = y$

L'ensemble des fonctions linéaires ... a donc un élément neutre $y = z$

Comme le résultat de l'opération est l'élément neutre, on a bien des éléments opposés.

Symétrie / 1° bissectrice

N° 2

Montrer que l'ensemble des fonctions proportionnelles à la variable forment un groupe relativement à la même opération.

Fonctions proportionnelles de la forme
$y = ax \quad V_1$
$z = Ay \quad V_2$
$z = Aax \quad F$

Association car en considérant les ensembles
$y = ax \quad 1$
$z = Ay \quad 2$
$P = Bz \quad 3$

on peut passer indifféremment de 1 à 2 ou de 1 à 3

A chaque élément correspond un élément neutre ;
$y = ax \equiv Aax$
soit $A = 1$ d'où $y = z$ élément neutre

Donc à tout élément correspond un opposé

N° 3

Montrer que l'ensemble des fonctions homographiques forme un groupe relativement à la même opération.

Fonction de la forme $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad V_1$

$z = \dfrac{Ay+B}{Cy+D} \quad V_2$

F : $z = \dfrac{A\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + B}{C\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + D} = \dfrac{Aax + Ab + Bcx + Bd}{Cax + Cb + Dcx + Dd}$

$z = \dfrac{x(Aa+Bc) + Ab + Bd}{x(Ca+Dc) + Cb + Dd}$

c'est encore une fonction homographique → opération interne

Association : même raison que précédemment.

A chaque élément correspond un élément neutre si
$\dfrac{ax+b}{cx+d} \equiv \dfrac{x(Aa+Bc) + Ab + Bd}{x(Ca+Dc) + Cb + Dd}$

$(ax+b)\left[x(Ca+Dc) + Cb + Dd\right] \equiv (cx+d)\left[x(Aa+Bc) + Ab + Bd\right]$
$x(Ca+Dc) + Cb + Dd \equiv x(Aa+Bc) + Ab + Bd$
$Cb + Dd \equiv Ab + Bd$
$Ca + Dc \equiv Aa + Bc$
$ax + b \equiv cx + d$
$x(a-c) \equiv d - b$
$a = c \qquad d = b$
$C + D \equiv A + B$

N° 4

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires forme un groupe relativement à l'opération qui consiste à additionner 2 fonctions

Soit les fonctions $y = ax + b \quad (1)$
$z = cx + d \quad (2)$

la somme Σ : $y + z = (a+c)x + b + d$ est encore une fonction linéaire donc opération interne.

Elle est associative car si on prend une 3° fonction linéaire
$p = mx + n \quad (3)$
on obtient la fonction linéaire Σ indifféremment en faisant la somme de (1)+(2) ou (1)+(3) ou (2)+(3)

Elément neutre : relativement à l'addition ;
Tout élément ajouté à x donne x
$y = ax + b + N \rightarrow y \rightarrow$ élément neutre $y = 0$: axe des x

Tout élément a donc un opposé : si $y = 0 \longrightarrow$ élément neutre

n° 5 : M désignant le milieu de DB et N le milieu de AC établir : $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} \upuparrows 4\,\vec{NM}$

n° 6 α, β, γ étant les milieux des cotés BC, CA et AB déterminer la somme géométrique $\vec{A\alpha} + \vec{B\beta} + \vec{C\gamma}$

n° 7 $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant 2 vecteurs, quelle est la figure formée par les 4 points A, B, C, D tel que
$\vec{OA} \upuparrows \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{OB} \upuparrows \vec{a} - \vec{b}$
$\vec{OC} \upuparrows -\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{OD} \upuparrows -\vec{a} - \vec{b}$

n° 8 M étant le milieu de DB et N le milieu de AC, établir
$2\vec{MN} \upuparrows \vec{DA} + \vec{BC} \upuparrows \vec{BC} + \vec{BA}$

NB : Rédiger sans figure

N° 5

M désignant le milieu de DB et N le milieu de AC, établir :

$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} \upuparrows 4\,\vec{NM}$

H | $\vec{DM} \upuparrows \vec{MB}$
| $\vec{AN} \upuparrows \vec{NC}$

$\vec{AB} + \vec{AD} \upuparrows 2\,\vec{AM}$
$\vec{CB} + \vec{CD} \upuparrows 2\,\vec{CM}$
$2(\vec{AM} + \vec{CM}) \upuparrows -2(\vec{MC} + \vec{MA})$
$\upuparrows -4\vec{MN}$

soit $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} \upuparrows 4\,\vec{NM}$ cqfd

N° 6

α, β, γ étant les milieux des cotés BC, CA et AB, déterminer la somme géométrique $\vec{A\alpha} + \vec{B\beta} + \vec{C\gamma}$.

$\vec{A\alpha} \upuparrows \vec{AB} + \vec{B\alpha}$
$\vec{B\beta} \upuparrows \vec{BC} + \vec{C\beta}$
$\vec{C\gamma} \upuparrows \vec{CA} + \vec{A\gamma}$

$\vec{A\alpha} + \vec{B\beta} + \vec{C\gamma} \upuparrows \underbrace{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}}_{\equiv 0} + \frac{1}{2}(\underbrace{\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}}_{\equiv 0})$

" $\upuparrows 0$