

Agrégation des Sciences Mathématiques. Session normale de 1920 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.39

Type de document : texte ou document administratif

Éditeur : Ministère de l'Instruction publique

Période de création : 1er quart 20e siècle

Date de création : 1920

Matériau(x) et technique(s) : papier

Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.

Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm

Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1920.

Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets

Calcul et mathématiques

Filière : Supérieure

Autres descriptions : Langue : français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION NORMALE DE 1920.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

I. Dans un plan orienté on considère deux segments de droite AB , $A'B'$. Le lieu des points M du plan tels que l'on ait

$$\angle AMB + \angle A'MB' = 0$$

est en général une cubique passant par $ABA'B'$. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère) il faut et il suffit que les segments AA' , BB' aient le même milieu.

Réciproquement si AA' , BB' sont deux couples de points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère on a $\widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = 0$ lorsque M décrit la courbe.

II. Étant donné quatre points $ABA'B'$ dans un plan, le lieu des points M de ce plan tels que $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$ (1) est en général une cubique. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère) il faut et il suffit que les segments AB , $A'B'$ aient le même milieu.

Réciproquement étant donné une hyperbole équilatère (H) ayant pour équation $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, il existe une infinité de couples $AB A'B'$ tels que M décrivant (H) on ait la relation (1). Le point A étant choisi arbitrairement, il lui correspond des points réels $BA'B'$ déterminés sans ambiguïté par l'intersection de l'hyperbole (H') passant par A ayant pour asymptotes $ox oy$ et de l'ovale de Cassini (Γ) passant par A ayant pour foyers $x = \pm a$, $y = 0$. Où doit se trouver A pour que $A'B'$ viennent se confondre avec A et B ? Déduire de ce cas et de la relation (1) appliquée à la limite que A et B étant deux points de (H) diamétralement opposés on peut leur associer une direction Δ telle que en désignant par α β les

angles de MA , MB avec Δ on ait $\frac{MA}{\cos \alpha} = \frac{MB}{\cos \beta}$ lorsque M décrit (H) . Vérifier ensuite directement cette propriété.

III. L'hyperbole (H') et la cassinienne (Γ) se coupent en 4 points réels AB , $A'B'$ et 4 points imaginaires A_1B_1 , A_2B_2 deux à deux symétriques par rapport au centre O de (H) . Montrer que les quatre droites AB , $A'B'$ etc. passant par O sont deux à deux rectangulaires. Exprimer explicitement en fonction des coordonnées $(\alpha \beta)$ du point A celles de B , A' , B' .

T. S. V. P.

Quel est le lieu des points $A'B'$ lorsque A décrit une droite Δ issue de O ? Quels sont les arcs utiles de ce lieu? Quel est le lieu de $A'B'$ lorsque A décrit un cercle de centre O ?

IV. Soit $AB, A'B'$ deux segments ayant O pour milieu. On désigne par $\Gamma_A \Gamma_B$ deux cercles centrés en A et B orthogonaux au cercle

$$x^2 + y^2 - K = 0,$$

par $\Gamma_A \Gamma_{B'}$ deux cercles centrés en A' et B' orthogonaux au cercle $x^2 + y^2 - K' = 0$ ($K' \neq K$). Déterminer les points $ABA'B'$ de sorte que, M décrivant (H) , on ait la relation $\varpi_A \varpi_B = \varpi_{A'} \varpi_{B'}$, en désignant par $\varpi_A \varpi_B$ etc. les puissances du point M par rapport aux cercles $\Gamma_A \Gamma_B$ etc.

Les lieux de $AB, A'B'$ sont deux hyperboles conjuguées et $AB, A'B'$ en sont des diamètres conjugués.

V. Étant donné une quadrique (Q) peut-on trouver deux couples de points $AB, A'B'$ tels que M décrivant (Q) on ait $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$. Montrer que (Q) doit être un hyperboloïde à deux nappes dont une hyperbole principale est équilatère. Cette condition étant remplie et en outre une certaine inégalité étant vérifiée, il existe une infinité de couples $AB, A'B'$ de points réels. Leur lieu est une ellipse (E) et $ABA'B'$ forment un faisceau harmonique avec les diagonales du rectangle construit sur les axes de (E) .

On considère une biquadratique sphérique, supposée réelle, ayant pour équations : $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Existe-t-il des points $AA'BB'$ tels que M décrivant cette courbe on ait : $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$? Trouver tous les couples tels que les segments $AB, A'B'$ aient pour milieu le centre O de la sphère.

NOTA. — Il sera commode d'employer les coordonnées polaires pour la recherche des lieux des IV^e et V^e parties.

