

# Agrégation des Sciences Mathématiques. Session spéciale d'octobre 1919 : problème de calcul différentiel et intégral

**Numéro d'inventaire** : 2016.90.36

**Type de document** : texte ou document administratif

**Éditeur** : Ministère de l'Instruction publique

**Période de création** : 1er quart 20e siècle

**Date de création** : 1919

**Matériau(x) et technique(s)** : papier

**Description** : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.

**Mesures** : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm

**Notes** : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1919.

**Mots-clés** : Examens et concours : publicité et sujets

Calcul et mathématiques

**Filière** : Supérieure

**Autres descriptions** : Langue : français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 2 p.

ill.

MINISTÈRE  
DE  
L'INSTRUCTION  
PUBLIQUE.

# AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION SPÉCIALE D'OCTOBRE 1919.

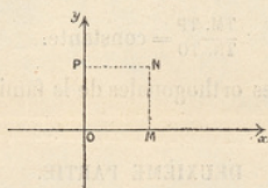
## PROBLÈME

### DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

#### PREMIÈRE PARTIE.

1° Soit  $f(\zeta)$  une fonction de la variable complexe  $\zeta = \xi + i\eta$ . Soit  $C$  le contour du carré OMNP dont les sommets ont respectivement pour affixes les quatre nombres complexes

$$0, 1, 1+i, i.$$



Montrer que si  $f(\zeta)$  est sur  $C$  une fonction de  $\zeta$  bien déterminée et bornée qui est continue sur  $C$  sauf peut-être aux sommets, l'intégrale curviligne

$$\int_C f(\zeta) d\zeta$$

est une fonction de la variable complexe  $z = x + iy$  qui est holomorphe en tout point n'appartenant pas au contour  $C$ .

2° Calculer effectivement l'intégrale (sous forme de combinaison algébrique de fonctions élémentaires de  $z$ ) dans les trois cas suivants :

I.  $f(\zeta) = \zeta$  sur tout le contour  $C$

II.  $f(\zeta) = 1$  quand  $\eta = 0$  ou  $\eta = 1$

$= 0$  sur tout le reste du contour  $C$

III.  $f(\zeta) = \xi$ , partie réelle de  $\zeta$ , sur tout le contour  $C$ .

(Le sens positif de parcours sur  $C$  est celui dans lequel on rencontre successivement les points  $O, M, N, P$ .)

T. S. V. P.



3° Montrer que dans ces trois cas l'intégrale est une fonction continue dans tout le plan sauf *peut-être* sur la ligne polygonale ouverte OMNP d'origine O, extrémité P.

4° Désignons par  $2i\pi F(z)$  la valeur de l'intégrale calculée quand  $f(\zeta) = \xi$  (cas III), en un point  $z$  situé en dehors de la ligne ouverte OMNP. On demande de calculer la discontinuité éprouvée par  $F(z)$  en traversant cette ligne polygonale (de l'intérieur du carré C vers l'extérieur). Le calcul sera effectué en se servant de l'expression analytique de  $F(z)$  obtenue au paragraphe 2°, III.

5° Développer  $F(z)$  en série suivant les puissances entières de  $\frac{1}{z}$ . Déterminer le domaine de convergence de la série obtenue.

6° Calculer la dérivée  $F'_z$  de  $F(z)$ . Séparer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

*Remarque.* — On aura soin pour ces différentes questions de préciser, quand il y a lieu, quelles sont celles des branches des fonctions élémentaires multiformes employées pour calculer  $F(z)$  et  $F'_z$  qu'il faut considérer pour que les égalités formelles obtenues soient exactes.

7° On considère dans le plan  $xoy$  les courbes S telles que si T est un point variable sur l'une de ces courbes  $\Gamma$ , l'on ait sur S

$$\frac{TM \cdot TP}{TN \cdot TO} = \text{constante.}$$

Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes S.

## DEUXIÈME PARTIE.

1° Montrer que l'intégrale  $\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ , où  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ , croît indéfiniment lorsque  $\lambda$  tend vers zéro.

2° On considère l'intégrale

$$J(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + \varepsilon \cos^2 x}}$$

où  $\varepsilon$  est un nombre  $> 0$ . Montrer que si  $\varepsilon$  tend vers zéro la quantité  $J(\varepsilon)$  croît indéfiniment.

3° En établir l'expression approchée

$$J(\varepsilon) = \log \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} + \omega$$

où  $\omega$  est infiniment petit en même temps que  $\varepsilon$ .

