

Certificats d'Etudes Supérieures. Université de Lille, Faculté des sciences. Session de mai-juin 1967.

Numéro d'inventaire : 1999.01421

Type de document : imprimé divers

Éditeur : Université de Lille (Lille)

Date de création : 1966

Description : Feuilles simples de couleur agrafées par épreuves.

Mesures : hauteur : 310 mm ; largeur : 210 mm

Notes : Intitulés des différentes épreuves du Certificat d'Etudes Supérieures.

Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets

Calcul et mathématiques

Filière : Université

Niveau : Supérieur

Nom de la commune : Lille

Nom du département : Nord

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : 35

Lieux : Nord, Lille

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

SESSION DE MAI/JUIN 1967

CERTIFICAT D'ETUDES SUPERIEURES

de MATHEMATIQUES II

Epreuve de Calcul Différentiel

PROBLEME.-

---) Il sera tenu grand compte de l'énoncé précis des théorèmes utilisés)

On considère les deux espaces normes suivants :

$$E = \mathbb{R}_m^3 \text{ (coordonnées } u, v, w) ; F = \mathbb{R}_M^3 \text{ (coordonnées } x, y, z)$$

avec

$$\|m\|^2 = u^2 + v^2 + w^2 ; \|M\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

On désigne par U l'ouvert complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}_M^3$.

Dans $\mathbb{R}_M^3$ on considère la forme différentielle

$$\Psi = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$$

et dans U on considère la fonction

$$g(M) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3}$$

On pose $\omega = g \Psi$.

a) Soit S la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ orientée comme bord de la boule de rayon ρ . Enoncer la formule de Stokes, et en déduire l'intégrale :

$$\iint_S \Psi \quad \text{en déduire} \quad \iint_S \omega$$

Pourrait-on calculer directement la seconde intégrale à l'aide de la formule de Stokes ?

b) Montrer que $d\omega = 0$

c) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_m^3$ et soit $D \subset \Omega$ un compact dont l'intérieur, non vide, est muni de l'orientation canonique de $\mathbb{R}_m^3$ et dont le bord Γ est une surface assez régulière pour que la formule de Stokes soit applicable.

Soit f une application de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}_M^3$ telle que $f(\Gamma) \subset U$; on pose :

$$I(f, \Gamma) = \iint_{\Gamma} f^* \omega$$

Montrer, sans aucun calcul, que si $f(D) \subset U$ (c'est-à-dire si la fonction vectorielle f n'a pas de zéros dans D) on a $I(f, \Gamma) = 0$

d) On suppose que la restriction f_D de f à D est un difféomorphisme de classe C^2 sur la boule $\|M\| \leq \rho$ (c'est-à-dire que f_D est biunivoque, f_D et f_D^{-1} étant de classe C^2). Montrer que, dans ce cas

.../...



UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

SESSION DE SEPTEMBRE / OCTOBRE 1966

CERTIFICAT D'ETUDES SUPERIEURES

de MECANIQUE GENERALE

Durée de l'épreuve : 4 heures

---) Les deux questions sont indépendantes. Elles devront être traitées sur des feuilles séparées, de couleurs différentes : blanche pour la première, saumon pour la seconde.

I.- Un losange A B C D, formé de quatre barres égales et homogènes réunies par des articulations, se meut dans un plan horizontal π , le sommet A étant maintenu fixe. On suppose tous les frottements négligeables. A l'instant initial la figure A B C D est un carré et, toujours à l'instant initial, les vitesses angulaires des barres A B et A D sont égales respectivement à ω_1 , et ω_2 . On désigne par θ_1 et θ_2 les angles que font à un instant t quelconque les barres A B et A D avec un axe fixe A x du plan π . La longueur d'une barre est ℓ et sa masse est m.

- 1) Calculer l'énergie cinétique du système formé par les quatre barres.
- 2) Ecrire les équations différentielles du mouvement de ce système et obtenir deux intégrales premières. Trouver l'équation différentielle de la forme $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = f(\varphi)$ satisfaite par l'angle $\widehat{B A D} = \varphi$. Quelle est la condition que doivent vérifier ω_1 et ω_2 pour que durant le mouvement φ possède un maximum ?

II.- Un solide S, homogène et pesant, est de révolution par rapport à un axe O z, et le point O de cet axe est maintenu fixe, cette liaison étant réalisée sans frottement. Il n'y a pas d'autres forces données que le poids. On désigne par $O x_1 y_1 z_1$ les axes fixes, $O z_1$ étant la verticale ascendante, et par $O x y z$ les axes liés à S, $O z$ étant orienté dans le sens qui va de O vers le centre d'inertie G de S. Soient M le point de S de coordonnées 0, 0, 1 par rapport aux axes $O x y z$, P la projection de M sur le plan horizontal $O x_1 y_1$, et enfin x_1 et y_1 les coordonnées du point P par rapport aux axes $O x_1 y_1$.
.../...

MECANIQUE GENERALE - SEPTE. / OCT. 1966

- 2 -

La masse du solide S est m, ses moments principaux d'inertie en O sont A, A, C, et on a $OG = l$.

1) Calculer les composantes b_{x_1} et b_{y_1} par rapport aux axes Ox_1 et Oy_1 du moment cinétique $\vec{L}_O$ de S par rapport au point O. Montrer que b_{x_1} et b_{y_1} s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} b_{x_1} &= F y_1' + G x_1 + H y_1, \\ b_{y_1} &= P x_1' + Q x_1 + R y_1, \end{aligned}$$

F, G, H et P, Q, R étant des fonctions de l'angle d'Euler θ et de θ' , fonctions que l'on déterminera. On utilisera le résultat donné par la troisième équation d'Euler.

2) Le solide S se meut de telle façon que l'axe Oz reste au voisinage de l'axe Oz_1 . Ecrire les équations approchées du mouvement en prenant pour inconnues x_1 et y_1 (On prendra $\theta \approx 0$ dans b_{x_1} et b_{y_1}). Montrer que ces équations forment un système différentiel linéaire, à coefficients constants. Intégrer ce système. (On posera $w = x_1 + i y_1$).

3) Le solide S effectue toujours le mouvement du paragraphe précédent. A l'instant initial on donne à S une rotation autour de Oz de vitesse angulaire r_0 et on suppose que l'on a

$$r_0^2 > \frac{4 A m g l}{C^2},$$

Montrer que la trajectoire du point P est une ellipse E de centre O, qui tourne

autour de O avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{C r_0}{2 A}$. Déterminer la période T

du mouvement de P sur l'ellipse E.

- o o o -