Agrégation des Sciences Mathématiques. Session de 1922 : problème de calcul différentiel et intégral

Numéro d'inventaire : 2016.90.46
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1922
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1922.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1922.

PROBLÈME
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

1° Déterminer la courbe la plus générale C telle qu'en la supposant rigide et animée d'un mouvement convenable, elle puisse être, à un instant donné, normale aux trajectoires de tous ses points. On examinera d'abord les deux cas simples où, à cet instant, le mouvement hélicoïdal tangent se réduit soit à une translation, soit à une rotation autour d'un axe.

2° Dans le cas général, on prendra l'axe du mouvement hélicoïdal tangent, à l'instant considéré, comme axe oz mobile, lié à la courbe C. En appelant $2\pi h$ le pas des hélices qui seraient décrites dans ce mouvement tangent, et ρ, φ, z les coordonnées cylindriques d'un point M de C, par rapport aux axes mobiles ox, oy, oz, liés à C, montrer que si l'on se donne h, la projection de C sur le plan xoy et un point de C, la courbe C est déterminée.

3° Définir géométriquement la courbe C par une relation simple entre la cote z d'un point M de C et l'aire A balayée par la projection de oM sur xoy. Cette définition autorise à nommer la courbe C une quasi-hélice.

4° Montrer que le rayon de torsion T de C en M s'exprime simplement en fonction de la distance ρ de M à oz. (On appellera σ la longueur d'un arc de C, d'origine fixe et terminé en M.)

5° Montrer que pour la quasi-hélice C la plus générale, le rayon de courbure R de C en M peut s'exprimer en fonction de h, de T et des dérivées de T par rapport à σ.

6° Déterminer la forme de celles des courbes C qui sont à torsion constante.

7° Déterminer un mouvement continu d'une quasi-hélice C, où C reste *constamment* normale aux trajectoires Γ de tous ses points.

8° Montrer que ces trajectoires Γ sont des courbes simples et que le rayon de torsion T' de Γ en un point M est lié de façon simple au rayon de torsion T, en M, de la courbe C qui passe par ce point.

T. S. V. P.

9° Soit S la surface engendrée par C dans ce mouvement continu. On rapportera S à des axes fixes o_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$ et on appellera ρ_1, $\varphi_1 = \varphi + \theta$, z_1, les coordonnées cylindriques d'un point M de S par rapport à ces axes. Montrer que si ces axes sont convenablement choisis, ρ_1 et z_1 s'expriment simplement en fonction de ρ, z et θ.

10° Montrer que l'élément linéaire ds d'une courbe quelconque, tracée sur S, s'exprime simplement en fonction de ρ, θ, φ et de leurs différentielles.

11° Montrer qu'on peut, par un changement de variables convenable, mettre ds^2 sous la forme :

$$ds^2 = d\sigma^2 + [\mathrm{T}(\sigma)]\, dv^2.$$

12° Inversement, montrer que, $\mathrm{P}(\sigma)$ étant une fonction non négative donnée, il existe une infinité de quasi-hélices C non superposables, qui correspondent à des surfaces S dont le carré de l'élément linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = d\sigma^2 + \mathrm{P}(\sigma) dv^2.$$

13° Signaler en outre toutes les propriétés des courbes C et des surfaces S qui paraîtront dignes d'intérêt. [Il n'en sera tenu compte que si les questions précédentes ont été résolues.]