

Agrégation des Sciences Mathématiques. Session de 1922 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.48

Type de document : texte ou document administratif

Éditeur : Ministère de l'Instruction publique

Période de création : 1er quart 20e siècle

Date de création : 1922

Matériau(x) et technique(s) : papier

Description : Feuille double. Texte imprimé à l'encre noire.

Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm

Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1922.

Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets

Calcul et mathématiques

Filière : Supérieure

Autres descriptions : Langue : français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 4 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1922.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

I. Un cercle (Γ), rapporté à trois axes rectangulaires ox , oy , oz , a pour équations :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Deux tangentes fixes Δ , Δ' , à ce cercle, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T .

Montrer qu'il existe dans l'espace deux points ω , ω' , d'où l'on voit constamment le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées des points ω , ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ' .

Où doit se trouver P pour que les points ω , ω' soient réels, ou imaginaires, ou confondus?

Trouver, lorsque Δ et Δ' varient, l'équation de la surface (S_r) lieu des points ω , ω' .

Construire la méridienne de cette surface et établir que (S_r) est le lieu des projections de l'origine O sur les plans tangents à un certain hyperboloïde.

Existe-t-il des points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ , Δ' ?

II. On considère une ellipse (E) ayant pour équations :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > b).$$

Deux tangentes fixes Δ , Δ' , à cette ellipse, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T .

Montrer qu'il existe deux points ω , ω' de l'espace, d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées $(x, y, \pm z)$ de ω , ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ' .

D'après la nature de la question, prévoir géométriquement où doit se trouver le point P pour que ω et ω' soient confondus, et en déduire une décomposition en facteurs de l'expression de z^2 . Discuter la nature des points ω , ω' suivant la position de P .

T. S. V. P.

Former l'équation de la surface (S_z) lieu de ω, ω' , lorsque Δ et Δ' varient. Les sections de (S_z) par les plans xoz et $yozy$ comprennent chacune un cercle et un ovale de Cassini que l'on construira. On étudiera aussi la section par xoy .

Quels sont les couples Δ, Δ' auxquels correspond une infinité de points ω, ω' ?

Quels sont les points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ' ?

III. La droite $\omega\omega'$ rencontre en un point I le plan xoy . Montrer qu'à un point I (α, β) donné correspondent trois points P que l'on désignera par P_1, P_2, P_3 . Établir que ces points sont réels en même temps que le point I et qu'ils sont situés sur l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point.

[On pourra prendre comme inconnue auxiliaire : $a^2 \cdot \frac{\alpha - x_0}{x_0}$.]

Former en fonction de (α, β) l'équation du cercle (K) circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

Vérifier que (K) coupe le cercle orthoptique de (E) en deux points symétriques par rapport à O, qu'il passe par le symétrique de I par rapport à O, et enfin qu'il passe par le symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Dédire de là une construction du cercle (K) et des points P_1, P_2, P_3 , et que I étant réel, les points correspondants P_1, P_2, P_3 sont réels.

IV. Soient Δ, Δ' deux génératrices fixes, de même système, de l'hyperboloïde à une nappe (H) ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Une génératrice G, du second système, les rencontre en M et M'. Montrer qu'il existe deux points ω, ω' d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Soit θ le point de rencontre de Δ et de la génératrice parallèle à Δ' . Trouver la relation qui existe entre $O\omega$ et $O\theta$.

Former l'équation de la surface (S_ω) lieu des points ω, ω' , lorsque Δ et Δ' varient.

Cette surface est indépendante du système de génératrices considéré.

Il n'existe pas de couple Δ, Δ' auquel correspond une infinité de points ω .

V. Deux génératrices fixes Δ_1, Δ'_1 , de même système, du parabolôïde hyperbolique ayant pour équation :

$$\frac{z^2}{p} - \frac{x^2}{q} - 2x = 0,$$

sont rencontrées en M et M' par une génératrice variable G, de l'autre système.

Il n'existe pas en général de point ω d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Si Δ_1, Δ'_1 sont rectangulaires, il existe une infinité de points ω situés sur un cercle (Γ_1) , dont le plan passe par une droite fixe D_1 , lorsque le couple Δ_1, Δ'_1 varie.

Au deuxième système de génératrices correspondent, de même, des cercles (Γ_2) dont les plans passent par une droite D_2 . Les droites D_1, D_2 se rencontrent en un point I . Former l'équation de la surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2) , et démontrer que (Σ) est sa propre transformée dans une certaine inversion ayant I pour pôle.

Trouver tous les cercles tracés sur (Σ) , et les pôles des inversions qui n'altèrent pas cette surface.

NOTA. — Il sera commode de définir les tangentes à (Γ) ou (E) en fonction rationnelle d'un paramètre, et de définir un point du plan au moyen des paramètres des deux tangentes qui passent par ce point.

