

## Sujet de l'Ecole Polytechnique

**Numéro d'inventaire** : 2016.90.89

**Type de document** : travail d'élève

**Période de création** : 1er quart 20e siècle

**Date de création** : 1902 (à partir de )

**Matériau(x) et technique(s)** : papier cartonné

**Description** : Ensemble de fiches simples cartonnées tenues par un trombone. Ecriture sur le recto des feuilles. MS encre noire.

**Mesures** : hauteur : 19,7 cm ; largeur : 12,4 cm

**Notes** : Sujet de 1902 de l'Ecole Polytechnique repris comme exercice. Date estimée d'après la date du sujet étudié.

**Mots-clés** : Calcul et mathématiques

**Filière** : Supérieure

**Autres descriptions** : Langue : français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 12 p.

**Lieux** : Paris

Ex. 1902. Un <sup>plan</sup> donné rel<sup>é</sup> à 3 axes rect  $oxyz$ , 1<sup>er</sup> pt  $L$ ,  
de coord (a, b, c) et un cer (C) de r<sup>é</sup> par l'eq<sup>u</sup>

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Kx = 0, \quad z = 0$$

1<sup>o</sup> Former l'eq<sup>u</sup> du lieu des proj<sup>s</sup> orth de  $L$  sur les droites  
qui rene à la fois le cer (C) et l'axe  $oz$ . Reconnaître  
que ce lieu se compose d'une sphère et d'un mp<sup>l</sup>  $h$  ed<sup>é</sup> (S).

Eq. d'une dr var rene  $oz$  :  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-\lambda}{c}$ . Elle  
coupe  $z=0$ , au pt  $-\frac{d\lambda}{a}, -\frac{b\lambda}{b}, 0$ . Sans qu'elle rene  
le cer (C), il faut  $\delta$  :  $\frac{d^2\lambda}{a^2} + \frac{b^2\lambda^2}{b^2} = 0$ . Sans qu'elle rene

$$(d^2 + b^2)\lambda^2 + 2Kd\lambda = 0$$

qui se dé<sup>l</sup> en  $\lambda=0$  et  $(d^2 + b^2)\lambda + 2Kd = 0$ . La  
pre<sup>re</sup> signif<sup>ie</sup> que la dr passe à l'orig<sup>ine</sup> ; cette sol<sup>u</sup>  
était évid<sup>ente</sup> a priori. La seconde est la véritable  
cond<sup>ition</sup>.

Cou<sup>te</sup> d'abord une dr par l'orig<sup>ine</sup>  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$   
La proj<sup>e</sup> de  $L$  sur cette dr sera au pt d'int de la droite  
le plan men<sup>e</sup> par  $L$  per<sup>pendiculaire</sup> à la droite

$$d(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0$$

Le lieu de la proj<sup>e</sup> s'obte<sup>n</sup> en eli<sup>minant</sup>  $d, b, c$  entre les 3 eq<sup>u</sup>  
préc<sup>édentes</sup>. Cela donne

$$x(x-a) + y(y-b) + z(z-c) = 0.$$

C'est la sphère de r<sup>é</sup>  $OL$  cou<sup>te</sup> à  $a$ .

Cou<sup>te</sup> maintenant 1<sup>re</sup> dr var rene l'axe  $oz$  en 1<sup>er</sup> pt  $h$  que  $0$   
et une ann<sup>ée</sup> le cer (C).

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-\lambda}{c}, \quad (d^2 + b^2)\lambda + 2Kd = 0$$

La proj<sup>e</sup> de  $L$  sur cette dr sera à l'int<sup>érieur</sup> de la dr ou b<sup>or</sup>de  
de la dr

$$d(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0$$

On aura le lieu de ce pt en eli<sup>minant</sup>  $x, b, c, d$  entre les 4  
eq<sup>u</sup>, c<sup>est-à-dire</sup> en eli<sup>minant</sup>  $d$  entre les 3<sup>es</sup>

$$x(x-a) + y(y-b) + (z-c)(z-\lambda) = 0, \quad (d^2 + b^2)\lambda + 2Kd = 0$$

de la 1<sup>re</sup> j<sup>eu</sup> s<sup>ur</sup>

$$z-\lambda = -\frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c}, \quad \text{d'où } \lambda = \frac{x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)}{z-c}$$

Portons cette val<sup>eur</sup> de  $\lambda$  dans la seconde eli<sup>minée</sup> d'abord

$$(d^2 + b^2 - 2Kd)\lambda + 2Kd = 0$$

mais nous pour<sup>ons</sup> l'eq<sup>u</sup> du lieu

$$(1) (d^2 + b^2 - 2Kd)[x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)] + 2Kd z(z-c) = 0$$

Autre manière d'arriver à cette eq<sup>u</sup>.

