

Mathématiques II

Numéro d'inventaire : 2025.0.99

Auteur(s) : Michel Quellier

Type de document : travail d'élève

Période de création : 3e quart 20e siècle

Date de création : 1956-1957

Matériau(x) et technique(s) : papier vergé | plume de métal

Description : Cahier à couverture cartonnée jaune. Reliure métallique en spirale. Réglure petits carreaux 5 x 5 mm sans marge. Pontuseaux verticaux et vergeures horizontales. Filigrane "Corona" avec la représentation d'une couronne royale espagnole.

Mesures : hauteur : 27 cm ; largeur : 21 cm

Notes : Il s'agit du deuxième cahier de Mathématiques de Michel Quellier, élève en classes préparatoires Mathématiques spéciales (seconde année de la filière de classes préparatoires aux grandes écoles ou CPGE), scolarisé au lycée Pothier d'Orléans durant l'année 1956-1957, dans la perspective du passage du concours de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris.

Contenu (en sommaire dans les dernières pages du cahier) Surfaces définies paramétriquement Surfaces réglées, Surfaces réglées développables Surfaces définies par une équation implicite Lieux géométriques dans l'espace ; Lieux géométriques des droites - cone - cylindre - conoïde Surface de révolution : Surfaces réglées ; Surfaces cerclées Enveloppes dans le plan : Equations tangentielles ; Enveloppes de cercles ; Dualité ; Enveloppes de l'espace Séries : Règles de Cauchy ; Règle de d'Alembert ; Série $U_n = f(n)$; Séries à termes négatifs, qq, série alternée ; Séries à termes complexes ; Calcul de la somme ; Produit de deux séries A.C. ; Suites - Suite définie par itération ; Séries de Taylor, de Maclaurin ; exponentielle imaginaire Primitives : Changement de variables - Intégration par parties ; Fractions rationnelles - Eléments de la deuxième espèce ; Fonctions trigonométriques rationnelles ; Expressions irrationnelles ; Intégrale définie ; Extension ; Comparaison Intégrale - série ; Calcul approché ; Valeur moyenne ; Calcul des courbes planes ; Longueur d'un arc de courbe - Abscisse curviligne ; Dérivation vectorielle Courbures : Rayon de courbure - centre de courbure ; Développée - développantes ; Courbures en coordonnées polaires ; Courbure dans l'espace ; Rayon de courbure - centre de courbure - axe de courbure - cercle osculateur ; Torsion en coordonnées semi-polaires - en coordonnées sphériques Intégrales doubles : Coordonnées cartésiennes - coordonnées polaires ; Calcul des surfaces gauches ; Formule de Greene - formule de Stokes ; Intégrales triples ; Volumes -formule des trois niveaux ; Formule d'Ostrogradski - masse _ centre de gravité ; Moments d'inertie ; Equations différentielles - Dn 1er ordre ; A variables séparées - linéaires ; de Bernoulli - homogènes ; de Clairaut - de Lagrange - de Riccati ; changement de variables ; Trajectoires orthogonales ; Equations différentielles 2ème ordre

Mots-clés : Calcul et mathématiques

Lieu(x) de création : Orléans

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Paginé

Commentaire pagination : 172 p. dont 169 p. manuscrites

Surfaces définies paramétriquement

$$M \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{qd } u \text{ et } v \text{ varient, engendrent le lieu de } M \text{ est une surface} \\ f, g, h \text{ continues et dérivées continues} \end{array}$$

Si u est x, y, z ne dépendent que de v définissent ainsi une courbe C courbe C_u

C_u varie avec u et engendre la surface
 v est la courbe Γ_v engendrant la surface.

Par un point $M_0(u_0, v_0)$ de la surface passe la courbe C_{u_0} et la courbe Γ_{v_0} . C_{u_0} et Γ_{v_0} s'appuient l'une sur l'autre.

Plan tangent Sur la surface on peut tracer une courbe $u(t), v(t) \mid x = f[u(t), v(t)]$

Sur la surface on peut tracer la γ à cette courbe

$$\begin{cases} x' = u' f_u + v' f_v \\ y' = u' g_u + v' g_v \\ z' = u' h_u + v' h_v \end{cases}$$

Courbes passant par M sur la surface
Pour toutes les courbes f_u, g_u et h_u sont les mêmes
 u' et v' varient.

Sont les vecteurs de composantes f_u, g_u, h_u

$\vec{T}$ la tangente $\rightarrow x' y' z'$

$\vec{T} = u' \vec{U} + v' \vec{V}$ qd u' et v' $\vec{T}$ est dans un plan fixe défini par $\vec{U}, \vec{V}$

$\vec{U}$ vecteur tangent à la courbe Γ_v Le plan γ est défini par les 2 tangentes
 $\vec{V}$ vecteur tangent à la courbe C_u aux 2 courbes génératrices

Equation du plan γ

$$\begin{vmatrix} x - f(u, v) & y - g(u, v) & z - h(u, v) \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix} = 0$$

plan si $\vec{U} \wedge \vec{V} \neq 0$

Normale à la surface

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$$

$$\frac{x - f(u, v)}{L} = \frac{y - g(u, v)}{M} = \frac{z - h(u, v)}{N}$$

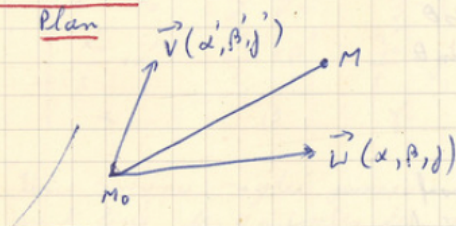
$$L = g_u h_v - g_v h_u$$

$$M = h_u f_v - h_v f_u$$

$$N = f_u g_v - f_v g_u$$

Surfaces usuelles

Plan



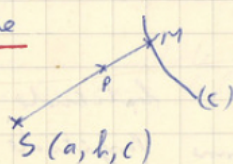
$$\vec{M} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V}$$

$$x = x_0 + \lambda \alpha + \mu \alpha'$$

$$y = y_0 + \lambda \beta + \mu \beta'$$

$$z = z_0 + \lambda \gamma + \mu \gamma'$$

Cone



$$(c) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

$$SM \begin{cases} \alpha = f(t) - a \\ \beta = g(t) - b \\ \gamma = h(t) - c \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x = a + p[f(t) - a] \\ y = b + p[g(t) - b] \\ z = c + p[h(t) - c] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + p\alpha(t) \\ y = b + p\beta(t) \\ z = c + p\gamma(t) \end{cases}$$

Si t est fixe M est fixe : génératrice

$$p \text{ est } \vec{SP} = p \cdot \vec{SM}$$

courbes homothétiques de (c)

$$\text{Cone de sommet } O \quad x = p\alpha(t) \quad y = p\beta(t) \quad z = p\gamma(t)$$

Cône de révolution Sommet 0 et axe Oz base dans $z=1$

base $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = 1 \end{cases}$

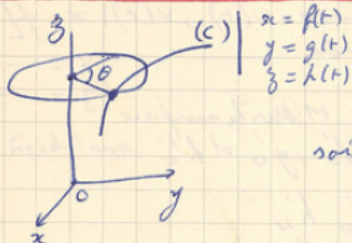
un cercle de rayon $r = r_0$

cône $\begin{cases} x = p r \cos \varphi \\ y = p r \sin \varphi \\ z = p \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = z r \cos \varphi \\ y = z r \sin \varphi \end{cases}$

cylindre $\begin{cases} x = f(t) + \alpha p \\ y = g(t) + \beta p \\ z = h(t) + \gamma p \end{cases}$

cylindre d'axe Oz $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) + p \end{cases}$

Surfaces de révolution en axes x, y d'axe Oz



$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

si $\begin{cases} f(t) = r \cos \varphi \\ g(t) = r \sin \varphi \end{cases}$

après la Rot $\begin{cases} r \cos(\varphi + \theta) = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta \\ r \sin(\varphi + \theta) = r \sin \varphi \cos \theta + r \cos \varphi \sin \theta \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = f(t) \cos \theta - g(t) \sin \theta \\ y = f(t) \sin \theta + g(t) \cos \theta \\ z = h(t) \end{cases}$

courbes $t = \text{cte}$: parallèles de la surface

$\theta = \text{cte}$ courbes déduites par rotation de (C)

exemple : hyperboloïde

droite $\begin{cases} x = a \\ y = m z \end{cases}$

hyperboloïde $\begin{cases} x = a \cos \theta - m z \sin \theta \\ y = a \sin \theta + m z \cos \theta \\ z = z \end{cases}$

Si la courbe est définie par sa méridienne (x, z)

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = h(t) \end{cases}$

$\begin{cases} x = f(t) \cos \theta \\ y = f(t) \sin \theta \\ z = h(t) \end{cases}$

représentation paramétrique d'un cercle (parallèle) de rayon $|f(t)|$

Cône de révolution

$\begin{cases} x = r \\ z = m r \end{cases}$

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = m r \end{cases}$

ou $\begin{cases} x = \frac{z}{m} \cos \theta \\ y = \frac{z}{m} \sin \theta \\ z = z \end{cases}$



$\begin{cases} x = p \sin \alpha \\ z = p \cos \alpha \end{cases}$

$\begin{cases} x = p \sin \alpha \cos \theta \\ y = p \sin \alpha \sin \theta \\ z = p \cos \alpha \end{cases}$

Sphère

centre 0 rayon R engendrée par un $\frac{1}{2}$ cercle

$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$

$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$

$\varphi = \text{cte}$ parallèle latitude
 $\theta = \text{cte}$ $\frac{1}{2}$ méridienne longitude

Surface réglée

si la surf. est engendrée par une droite

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha f \\ y = y_0 + \beta f \\ z = z_0 + \gamma f \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$$

fonction de t

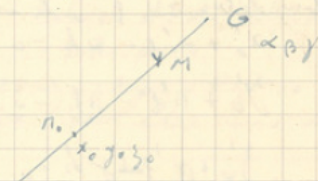
$$\begin{cases} x = x_0(t) + \alpha(t)f \\ y = y_0(t) + \beta(t)f \\ z = z_0(t) + \gamma(t)f \end{cases}$$

paramètres t et f

Plan ty

$$\begin{vmatrix} x - x_0 - \alpha f & y - y_0 - \beta f & z - z_0 - \gamma f \\ f' & \alpha' + \alpha f' & \gamma' + \gamma f' \\ f'' & \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 + \alpha' f & y'_0 + \beta' f & z'_0 + \gamma' f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$



- Le plan ty en M passe par M, il contient la génératrice puisque il contient $(\vec{n}_0, M)$ et $G(x_0, y_0, z_0)$
- Le plan ty est // à un vecteur somme de 2 autres $\vec{u} + p\vec{v}'$ varie dans le plan $\vec{u}, \vec{v}'$ lorsque p varie
- Faisant varier le plan ty en M lorsque p varie (M se déplaçant sur G fixe) il ne peut que tourner autour de G

- ou Faisant varier un plan contenant G et le vecteur $\vec{u} + p\vec{v}'$
- Si le plan ty est indépendant de p, plan ty fixe
- Si $\vec{u} + p\vec{v}'$ indépendant de p si $\vec{u}, \vec{v}'(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v}'$ dans un même plan leur produit mixte est nul

$$\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

de la génératrice

- Dans ce cas la surface est une surface développable
- Si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{v}'$ ne sont pas dans un même plan lorsque p varie $\vec{u} + p\vec{v}'$ définit avec $\vec{v}$ un plan variable autour de la génératrice. la surface est alors une surface réglée gauche
- Si M s'éloigne à l'infini sur la génératrice le plan ty tend vers une position limite qui est le plan asymptote de la génératrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 + \alpha' f & y'_0 + \beta' f & z'_0 + \gamma' f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad f \rightarrow \infty \quad \frac{1}{f} \rightarrow 0$$

- Une surface réglée possède un cône directeur obtenu en menant par un point fixe des // à toutes les génératrices $x = x_0 + \alpha f$ caractéristique $x = \alpha f$
- Le plan asymptote de long d'une génératrice est // au plan ty $y = \beta f$ au cône directeur le long de la génératrice // $z = \gamma f$

On appelle point central d'une génératrice le point où le plan ty est $\perp$ au plan asymptote. Chaque génératrice possède un point central. On appelle ligne de striction le lieu de tous les points centraux de toutes les génératrices

Surfaces réglées développables

$$\begin{cases} x = x_0(t) + \alpha(t)f \\ y = y_0(t) + \beta(t)f \\ z = z_0(t) + \gamma(t)f \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$