Mathématiques II

Numéro d'inventaire : 2025.0.99
Auteur(s) : Michel Quellier
Type de document : travail d'élève
Période de création : 3e quart 20e siècle
Date de création : 1956-1957
Matériau(x) et technique(s) : papier vergé **|** plume de métal
Description : Cahier à couverture cartonnée jaune. Reliure métallique en spirale. Réglure petits carreaux 5 x 5 mm sans marge. Pontuseaux verticaux et vergeures horizontales. Filigrane "Corona" avec la représentation d'une couronne royale espagnole.
Mesures : hauteur : 27 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Il s'agit du deuxième cahier de Mathématiques de Michel Quellier, élève en classes préparatoires Mathématiques spéciales (seconde année de la filière de classes préparatoires aux grandes écoles ou CPGE), scolarisé au lycée Pothier d'Orléans durant l'année 1956-1957, dans la perspective du passage du concours de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris.
Contenu (en sommaire dans les dernières pages du cahier) Surfaces définies paramétriquement Surfaces réglées, Surfaces réglées développables Surfaces définies par une équation implicite Lieux géométriques dans l'espace ; Lieux géométriques des droites - cone - cylindre - conoïde Surface de révolution : Surfaces réglées ; Surfaces cerclées Enveloppes dans le plan : Equations tangentielles ; Enveloppes de cercles ; Dualité ; Enveloppes de l'espace Séries : Règles de Cauchy ; Règle de d'Alembert ; Série Un = f(n) ; Séries à termes négatifs, qcq, série alternée ; Séries à termes complexes ; Calcul de la somme ; Produit de deux séries A.C. ; Suites - Suite définie par itération ; Séries de Taylor, de Maclaurin ; exponentielle imaginaire Primitives : Changement de variables - Intégration par parties ; Fractions rationnelles - Eléments de la deuxième espèce ; Fonctions trigonométriques rationnelles ; Expressions irrationnelles ; Intégrale définie ; Extension ; Comparaison Intégrale - série ; Calcul approché ; Valeur moyenne ; Calcul des courbes planes ; Longueur d'un arc de courbe - Abscisse curviligne ; Dérivation vectorielle Courbures : Rayon de courbure - centre de courbure ; Développée - développantes ; Courbures en coordonnées polaires ; Courbure dans l'espace ; Rayon de courbure - centre de courbure - axe de courbure - cercle osculateur ; Torsion en coordonnées semi-polaires - en coordonnées sphériques Intégrales doubles : Coordonnées cartésiennes - coordonnées polaires ; Calcul des surfaces gauches ; Formule de Greene - formule de Stokes ; Intégrales triples ; Volumes -formule des trois niveaux ; Formule d'Ostrogradski - masse _ centre de gravité ; Moments d'inertie ; Equations différentielles - Dn 1er ordre ; A variables séparées - linéaires ; de Bernoulli - homogènes ; de Clairaut - de Lagrange - de Riccati ; changement de variables ; Trajectoires orthogonales ; Equations différentielles 2ème ordre
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Lieu(x) de création : Orléans
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Paginé
Commentaire pagination : 172 p. dont 169 p. manuscrites

Surfaces définies paramétriquement

$$M \left| \begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array} \right.$$

qd u et v varient, en général le lieu de M est une surface
f, g, h continues et dérivées continues

Si u = cste x, y, z ne dépendent que de v définissant ainsi une courbe C courbe C_u

C_u varie avec u et engendre la surface
v = cste courbe Γ_v engendrant la surface.
Par tt point $M_0(u_0, v_0)$ de la surface passe la courbe C_{u_0} et la courbe Γ_{v_0}. C_u et Γ_v s'appuyent les unes sur les autres

Plan tangent Sur la surface on peut tracer une courbe $u(t), v(t)$ $\left| \begin{array}{l} x = f[u(t), v(t)] \\ y = \text{———} \\ z = \text{———} \end{array} \right.$

Sur la surface on peut tracer la tg à cette courbe

$$\left| \begin{array}{l} x'_t = u' f'_u + v' f'_v \\ y'_t = u' g'_u + v' g'_v \\ z'_t = u' h'_u + v' h'_v \end{array} \right.$$

Courbes passant par M sur la surface
Pour ttes ces courbes f'_u, g'_u et h'_u sont les m̂ mais u' et v' varient.

Soient $\vec{U}$ le vecteur de composantes $f'_u \; g'_u \; h'_u$
$\vec{V}$ — — — $f'_v \; g'_v \; h'_v$
$\vec{T}$ la tangente → $x' \; y' \; z'$

$\vec{T} = u'\vec{U} + v'\vec{V}$ qq soient u' et v' $\vec{T}$ est dans un plan fixe défini par $\vec{U}, \vec{V}$
$\vec{U}$ vecteur tangente à la courbe Γ_v | le plan tg est défini par les 2 tangentes
$\vec{V}$ — — — — — C_u | aux 2 courbes génératrices

Equation du plan tg
$$\begin{vmatrix} x - f(u,v) & y - g(u,v) & z - h(u,v) \\ f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{vmatrix} = 0$$
plan si $\vec{U} \wedge \vec{V} \neq 0$

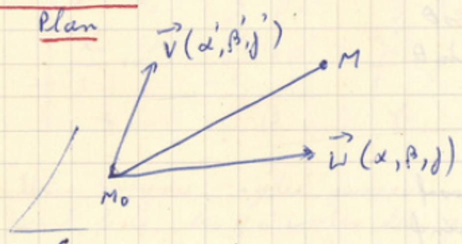
Normale à la surface
$\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$

$$\frac{x - f(u,v)}{L} = \frac{y - g(u,v)}{M} = \frac{z - h(u,v)}{N}$$

$$L = g'_u h'_v - g'_v h'_u \qquad M = h'_u f'_v - h'_v f'_u \qquad N = f'_u g'_v - f'_v g'_u$$

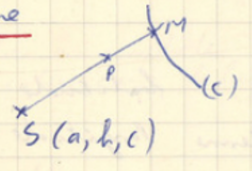
Surfaces usuelles

Plan



$$\overrightarrow{M_0 M} = \lambda \vec{U} + \mu \vec{V}$$
$$x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha'$$
$$y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta'$$
$$z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma'$$

Cone



$$(c) \left| \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{array} \right. \qquad SM \left| \begin{array}{l} \alpha = f(t) - a \\ \beta = g(t) - b \\ \gamma = h(t) - c \end{array} \right.$$

$$P \left| \begin{array}{l} x = a + \rho\,[f(t) - a] \\ y = b + \rho\,[g(t) - b] \\ z = c + \rho\,[h(t) - c] \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x = a + \rho\,\alpha(t) \\ y = b + \rho\,\beta(t) \\ z = c + \rho\,\gamma(t) \end{array}$$

Si t = cste M est fixe : génératrice
ρ = cste $\vec{SP} = \rho.\vec{SM}$ courbes homothétiques de (c)
Cone de sommet 0 $\quad x = \rho\,\alpha(t) \quad y = \rho\,\beta(t) \quad z = \rho\,\gamma(t)$

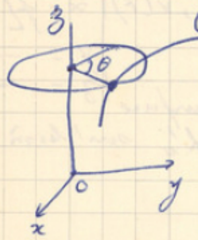
Cone de Revolution Sommet O et axe Oz base dans $z = 1$

base $\left|\begin{array}{l} x = \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi \\ y = \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi \\ z = 1 \end{array}\right.$ cercle de rayon $r = \operatorname{tg}\alpha$

cone $\left|\begin{array}{l} x = \rho\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi \\ y = \rho\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi \\ z = \rho \end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l} x = z\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi \\ y = z\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi \end{array}\right.$

cylindre $\begin{array}{l} x = f(t) + \alpha\rho \\ y = g(t) + \beta\rho \\ z = h(t) + \gamma\rho \end{array}$ cylindre d'axe Oz $\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{array}$ $\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) + \rho \end{array}$

Surfaces de Revolution en axes ⊥ d'axe Oz



$(C)\left|\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{array}\right.$

si $\left|\begin{array}{l} f(t) = r\cos\varphi \\ g(t) = r\sin\varphi \end{array}\right.$ après la Rot $r\cos(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta$

$r\sin(\varphi+\theta) = r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\theta$

soit $\left|\begin{array}{l} x = f(t)\cos\theta - g(t)\sin\theta \\ y = f(t)\sin\theta + g(t)\cos\theta \\ z = h(t) \end{array}\right.$

courbes $t =$ cste : parallèles de la surface

$\theta =$ cste courbes déduites par Rotation de (C)

exemple : hyperboloïde droite $\left|\begin{array}{l} x = a \\ y = mz \end{array}\right.$ hyperboloïde $\left|\begin{array}{l} x = a\cos\theta - mz\sin\theta \\ y = a\sin\theta + mz\cos\theta \\ z = z \end{array}\right.$

Si la courbe est définie par sa méridienne (xOz)

$\left|\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = h(t) \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} x = f(t)\cos\theta \\ y = f(t)\sin\theta \\ z = h(t) \end{array}$ | représentation paramétrique d'un cercle (parallèle) de rayon $|f(t)|$

Cone de Revolution $\begin{array}{l} x = r \\ z = mr \end{array}$ $\left|\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = mr \end{array}\right.$ ou $x = \dfrac{z}{m}$, $z = z$

$\left|\begin{array}{l} x = \rho\sin\alpha \\ z = \rho\cos\alpha \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x = \rho\sin\alpha\cos\theta \\ y = \rho\sin\alpha\sin\theta \\ z = \rho\cos\alpha \end{array}\right.$

Sphère centre O rayon R

engendrée par un ½ cercle $\begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{array}$

$\left|\begin{array}{l} x = R\cos\varphi\cos\theta \\ y = R\cos\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{array}\right.$

$\varphi =$ cste parallèle latitude

$\theta =$ cste ½ méridienne longitude

2

Surface réglée

si la surf. est engendrée par une droite

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\rho \\ y = y_0 + \beta\rho \\ z = z_0 + \gamma\rho \end{cases} \qquad x_0 \quad \alpha,\quad y_0 \quad \beta,\quad z_0 \quad \gamma \text{ fonction de } t$$

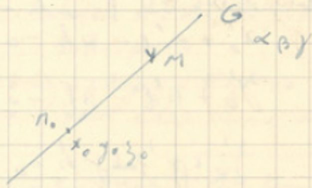
$$x = x_0(t) + \alpha(t)\rho \qquad y = y_0(t) + \beta(t)\rho \qquad z = z_0(t) + \gamma(t)\rho$$

2 paramètres t et ρ

Plan tg

$$x - f(t,\rho) \quad f'_t \quad f'_\rho \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 - \alpha\rho & y - y_0 - \beta\rho & z - z_0 - \gamma\rho \\ x'_0 + \alpha'\rho & y'_0 + \beta'\rho & z'_0 + \gamma'\rho \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$L_1 + \rho L_3 \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 + \alpha'\rho & y'_0 + \beta'\rho & z'_0 + \gamma'\rho \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$



- Le plan tg en M passe par M_0 il contient la génératrice puisqu'il contient $[\overrightarrow{M_0 M}$ et $G(\alpha, \beta, \gamma)]$
- Le plan tg est // à un vecteur somme de 2 autres $\overrightarrow{U} + \rho\overrightarrow{V'}$ varie dans le plan $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V'}$ lorsque ρ varie $\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 & : & \overrightarrow{U}, \\ \alpha'\rho & \beta'\rho & \gamma'\rho & : & \rho\overrightarrow{V'} \end{vmatrix}$

Façon dont varie le plan tg en M lorsque ρ varie (M se déplaçant sur G fixe) il ne peut que tourner autour de G

ou Façon dont varie un plan contenant G et le vecteur $\overrightarrow{U} + \rho\overrightarrow{V'}$

Si le plan tg est indépendant de ρ plan tg fixe

- $\overrightarrow{V}$ G $\overrightarrow{U} + \rho\overrightarrow{V'}$ indépendant de ρ si $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{V'}$ dans un même plan leur produit mixte est nul $\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$ plan tg fixe tout le long de la génératrice son équation sera $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$

Dans ce cas la surface est une surface développable

- Si $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ ne sont pas dans un même plan lorsque ρ varie $\overrightarrow{U} + \rho\overrightarrow{V'}$ définit avec $\overrightarrow{V}$ un plan variable autour de la génératrice. La surface est alors une surface réglée gauche

Si M s'éloigne à l'∞ sur la génératrice le plan tg tend vers une position limite qui est le plan asymptote de la génératrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{x'_0}{\rho} + \alpha' & \frac{y'_0}{\rho} + \beta' & \frac{z'_0}{\rho} + \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho \to \infty \quad \frac{1}{\rho} \to 0 \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

- Une surface réglée possède un cône directeur obtenu en menant par un point fixe les // à toutes les génératrices $\big| x = x_0 + \alpha\rho$ cône directeur $\begin{cases} x = \alpha\rho \\ y = \beta\rho \\ z = \gamma\rho \end{cases}$
- Le plan asymptote le long d'une génératrice est // au plan tg au cône directeur le long de la génératrice // $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$

On appelle point central d'une génératrice le point où le plan tg est $\perp$ au plan asymptote. Chaque génératrice possède un point central. On appelle ligne de striction le lieu de tous les points centraux de toutes les génératrices

Surfaces Réglées développables

$$\begin{cases} x = x_0(t) + \alpha(t)\rho \\ y = y_0(t) + \beta(t)\rho \\ z = z_0(t) + \gamma(t)\rho \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$