
Examen de PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.167

Auteur(s) : Daniel Lecouturier

Type de document : travail d'élève

Période de création : 4e quart 20e siècle

Date de création : 1975

Matériau(x) et technique(s) : papier | encre noire

Description : Cinq copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.

Mesures : hauteur : 31,1 cm

largeur : 24 cm

Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Daniel Lecouturier. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques-Sciences physiques-Technologie). L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à la salle de la Bourse, probablement à la Halle aux toiles ou au Palais des Consuls de Rouen. L'épreuve se déroule en 1975. La note obtenue est de 12,5/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 08,5/20.

Mots-clés : Compositions et copies d'examens

Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire

Lieu(x) de création : Rouen

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 20 p. dont 17 p. manuscrites

Nom et Prénom : <u>LECOUTURIER Daniel TC</u> N° d'inscription : <u>66</u> Centre d'examen : <u>Salle de la Bourse</u>	collez ici
Visa du Correcteur Note : <u>12,5</u> 20	Examen : <u>de PEGC</u> Session : <u>1975</u> Spécialité ou Série : <u>3. Maths - Physique (Technologie)</u> Composition de <u>Mathématiques.</u> Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les <u>1/5</u>

Premier Exercice.

$18 \equiv 5 \pmod{13}$ en effet : $18 = 1 \cdot 13 + 5$.

Or, nous savons que : $a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{p}$

Donc : $18 \equiv 5 \pmod{13} \Leftrightarrow 18^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \pmod{13}$.

de même : $44 \equiv 5 \pmod{13}$ en effet : $44 = 3 \cdot 13 + 5$.

D'où : $44^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \pmod{13}$.

$96 \equiv 5 \pmod{13}$ en effet : $96 = 7 \cdot 13 + 5$.

D'où : $96^{4n+2} \equiv 5^{4n+2} \pmod{13}$.

Si nous retranchons les 2 dernières congruences modulo 13 à la première congruence modulo 13, nous obtenons une congruence modulo 13 qui s'écrit :

$$18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \cdot 96^{4n+2} \equiv 5^{4n+1} - 5^{4n-1} - 3 \cdot 5^{4n+2} \pmod{13}$$

soit : $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \cdot 96^{4n+2} \equiv 5^{4n-1} (5^3 - 1 - 3 \cdot 5^3) \pmod{13}$

Si nous développons le terme entre parenthèses, nous obtenons :

$$5^3 - 1 - 3 \cdot 5^3 = 25 - 1 - 3 \cdot 125 = 24 - 375 = -351$$

Donc : $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \cdot 96^{4n+2} \equiv 5^{4n-1} \cdot (-351) \pmod{13}$.

Or : $351 = 13 \cdot 27 + 0$ Donc : $351 \equiv 0 \pmod{13}$.

soit encore : $5^{4n-1} \cdot (-351) \equiv 0 \pmod{13}$.

La relation de congruence est transitive :

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

3

donc: $\forall n \in \mathbb{N}^* : 18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \times 96^{4n+2} \equiv 0 [13]$
ce qui signifie que, quel que soit n entier naturel non nul, l'expression: $(18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \cdot 96^{4n+2})$ est divisible par 13.

Second Exercice.

$$z = x + iy$$

$$1) \quad |z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Leftrightarrow |x + iy - 2 + i| = |x + iy - 1 - i|$$

$$\Leftrightarrow |(x-2) + (y+1)i| = |(x-1) + (y-1)i|$$

Or: les modules des nombres complexes sont des quantités positives.

On peut donc écrire:

$$|z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y+1)i|^2 = |(x-1) + (y-1)i|^2,$$

$$z = x + iy. \quad \text{on sait que: } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ soit: } |z|^2 = x^2 + y^2.$$

$$\text{Donc: } |z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Soit:

$$(x-2)^2 - (x-1)^2 = (y-1)^2 - (y+1)^2.$$

En factorisant ces 2 identités remarquables:

$$[x-2-x+1][x-2+x-1] = [y-1-y-1][y-1+y+1]$$

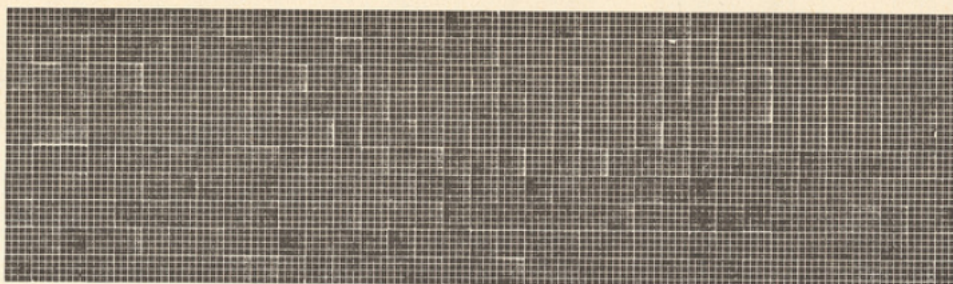
$$\Leftrightarrow (-1) \cdot (2x-3) = (-2)(2y)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 4y$$

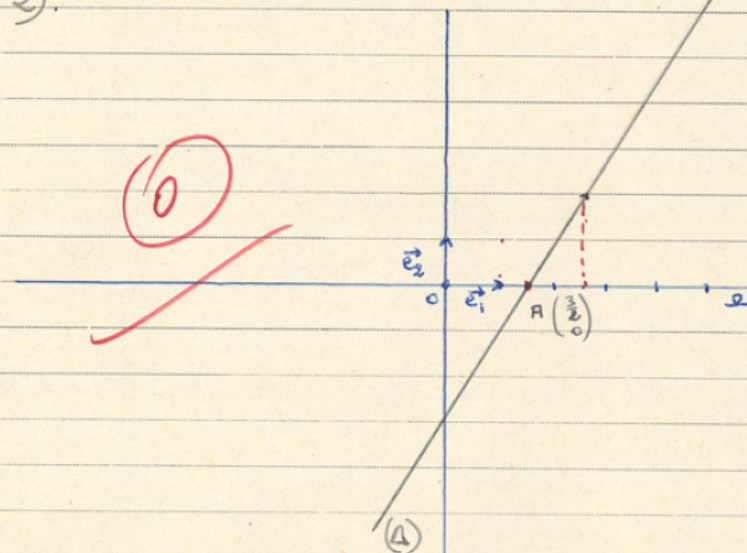
$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 3 = 0.$$

Cet ensemble de points M de coordonnées x et y du plan est une droite affine, de vecteur

1



directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, passant par le point $A \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,
de coefficient directeur: $\frac{1}{2}$.



Pour ~~con~~ tracer cette droite, on place le point A, puis on construit le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, en ce point. Tous les points M de la droite (A) sont tels que:
 $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3). $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = z' = (1+i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

Recherchons le ^{ou les} point ~~de~~ d'affixe z_0 , invariants par f . Son affixe z_0 sera telle que:

$$f(z_0) = z_0 = (1+i\sqrt{3})z_0 - 5i\sqrt{3}$$

$$z_0 = (1+i\sqrt{3})z_0 - 5i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z_0 - z_0 - i\sqrt{3}z_0 = -5i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow +i\sqrt{3}z_0 = +5i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z_0 = 5$$

Il n'y a qu'un seul point invariant ~~de~~ d'affixe

