
Entrée dans centre PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.134

Auteur(s) : Hervé Majorel

Type de document : travail d'élève

Période de création : 4e quart 20e siècle

Date de création : 1974

Matériau(x) et technique(s) : papier | encre bleue

Description : Quatre copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.

Mesures : hauteur : 31,1 cm

largeur : 24 cm

Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Hervé Majorel. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques Physique et Technologie), catégorie 3 section 3. L'épreuve est une composition de mathématiques. Le centre d'examen est à la Préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en juin 1974. La note obtenue est de 10/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 03,8/20.

Mots-clés : Compositions et copies d'examens

Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire

Lieu(x) de création : Rouen

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 16 p. dont 13 p. manuscrites

Nom et Prénom : MAJOREL Herve

N° d'inscription : 220

Centre d'examen : Prefecture

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Note :

20

Examen : Entrée de centre P.E.G.C.

Session : 1974

Spécialité ou Série : Section III

Si votre composition comporte plusieurs feuillets,

numérotez-les 1 / 4

Composition de

$$h(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

La fonction Arcsin est définie de $[-1, +1]$ de \mathbb{R}
La fonction Arccos est définie de $[-1, +1]$ de \mathbb{R}

D'où h sera définie pour

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\bullet \quad -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \begin{aligned} &-(1+x^2) \leq 2x \quad (\text{car } 1+x^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \text{toujours vrai}$$

$$\bullet \quad \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 1+x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad \text{toujours vrai}$$

$$\bullet \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow \begin{aligned} &-(1+x^2) \leq 1-x^2 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq 0 \quad \text{toujours vrai} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1-x^2 \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 \quad \text{toujours vrai}$$

Cette fonction est donc définie sur tout \mathbb{R} .

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

2) La fonction va être continue comme composée de fonctions continues

$$x \mapsto 2x \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad / \text{ces fonctions continues sur } \mathbb{R}.$$

\Rightarrow la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continue.

La fonction Arcsin est continue. Or la composée de (parcs) de fonctions continues est continue \Rightarrow la fonction $x \mapsto \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ est continue.

De même pour Arcos $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La somme de 2 fonctions continues est continue \Rightarrow h est continue sur tout \mathbb{R} .

$$3) \text{ Posons } f(x) = \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{Rig}(x) = \text{Arcos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

La fonction f est une fonction impaire $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$

La fonction g est une fonction paire ($g(x) = g(-x)$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$x \rightarrow +\infty \quad \frac{2x}{1+x^2} \sim \frac{2x}{x^2} \sim \frac{2}{x} \rightarrow 0 \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \frac{-x^2}{x^2} \sim -1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = 0 + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = 0 + k'\pi \quad \text{avec } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcos} \frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcos}(-1) = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



d'où : $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Arcco} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi + 2d\pi = (2d+1)\pi$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = d\pi + (2d+1)\pi = (2d+d+1)\pi = \boxed{\mu\pi} \quad \mu \in \mathbb{Z}$

De même pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} R(x)$ d est remplacé par d' et μ par μ' $\mu' \in \mathbb{Z}$

2) la fonction dérivée de Arcos $y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Elle est donc définie uniquement si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ est strictement positif et si $1-y^2 > 0$

ici $1-y^2 = \frac{1-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+4x^4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$

qui n'est toujours défini et strictement positif $\neq 0$ et par $x \neq \pm 1$.

la dérivée de Arcos y est $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

défini si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ est strictement positif, $1-y^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \neq 0$ lorsque $x \neq \pm 1$
 $\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$ (noter positif)

$1-y^2$ est défini car $(1+x^2)$ toujours $\neq 0$, $4x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$