
Entrée dans centre PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.134

Auteur(s) : Hervé Majorel

Type de document : travail d'élève

Période de création : 4e quart 20e siècle

Date de création : 1974

Matériaux et technique(s) : papier | encre bleue

Description : Quatre copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.

Mesures : hauteur : 31,1 cm

largeur : 24 cm

Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Hervé Majorel. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques Physique et Technologie), catégorie 3 section 3. L'épreuve est une composition de mathématiques. Le centre d'examen est à la Préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en juin 1974. La note obtenue est de 10/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 03,8/20.

Mots-clés : Compositions et copies d'examens

Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire

Lieu(x) de création : Rouen

Autres descriptions : Langue : Français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 16 p. dont 13 p. manuscrites

Nom et Prénom : MAJOREL Hervé

N° d'inscription : 220

Centre d'examen : Préfecture

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

DP

Examen : Entrée de section PEGC.

Session : 1975

Spécialité ou Série : Section III

Si votre composition
comporte plusieurs
feuillets.
numérotez-les 1 / 4

Note :
10

20

Composition de

$$h(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

La fonction Arcsin α est définie sur $[-1, 1]$ dans \mathbb{R}
La fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$ dans \mathbb{R}

D'où h sera définie pour

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} &\Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x \quad (\text{car } 1+x^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2+2x+1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \text{toujours vrai}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 &\Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 1+x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad \text{toujours vrai} \\ &\text{vérifié} \end{aligned}$$

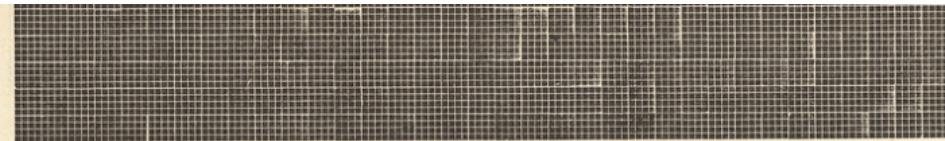
$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} &\Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 1-x^2 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq 0 \quad \text{toujours vrai} \end{aligned}$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow 1-x^2 < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < 2x^2 \quad \text{toujours vrai}$$

Cette fonction est donc définie sur tout \mathbb{R} .

0,5

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.



3) La fraction va être continuée comme composée de fractions continues

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+2x-x^2} \quad / \text{les fonctions continues sur } \mathbb{R}$$

\Rightarrow La fraction $a \rightarrow \frac{2x}{1+x^2}$ est combinée.

La fonction Arcsin est continue. Si la composition (produit) des fonctions continues est continue \Rightarrow a est $\therefore x \rightarrow \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$ est continue

Demême pour Arccos $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La somme de 2 fonctions continues est continue \Rightarrow b est continue sur tout \mathbb{R} .

$$3) \text{ Posons } f(x) = \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} \quad R(x) = \text{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

La fonction a est une fonction impaire $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$

La fonction g est une fonction paire ($g(x) = g(-x)$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\text{Posons } f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad R(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \frac{2x}{1+x^2} \sim \frac{2x}{x^2} \sim \frac{2}{x} \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \frac{x^2}{x^2} \sim 1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0 + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

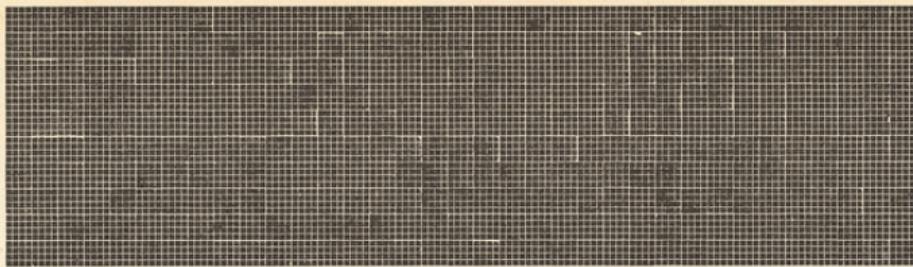
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0 - k\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0 + l\pi \quad \text{avec } l \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1+x^2} \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \text{Arccos}(-1) = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$$



$$\text{d'où: } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi + 2d\pi = (2d+1)\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \cancel{\pi} + (2d+1)\pi - (2d+k+1)\pi = \boxed{\mu\pi} \quad \mu \in \mathbb{Z}$$

De même pour $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ il faut remplacer par b' et j'pour j' $j \in \mathbb{Z}$

2). la fonction inverse de Arccos est $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Elle est donc définie sauf si $1-x^2 \neq 0$ et si $1-y^2 > 0$ ou $1-y^2 \geq 0$

$$\text{Ici } 1-y^2 = 1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

qui n'est toujours défini que si $x \neq \pm 1$.

La dérivée de Arccos y est $-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$$\text{défini si } 1-y^2 \neq 0 \text{ et si } 1-y^2 > 0 \text{ ou } 1-y^2 \geq 0 \text{ et si } 1-y^2 > 0 \text{ et si } 1-y^2 \geq 0$$

$$\frac{1+2x^2+x^4 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2}{(1+x^2)^2} \text{ toutes parts!}$$

y est défini sur $(1+x^2)$ sauf si $x=0$. $4x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$D(h) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

A
b'
j'