Entrée C-F du PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.121
Auteur(s) : Jocelyne Olmes
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1973
Matériau(x) et technique(s) : papier | encre bleue
Description : Deux copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), de la candidate Jocelyne Olmes. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques et physique-chimie), catégorie 2 section 3. L'épreuve est une composition de mathématiques. Le centre d'examen est l'ENF ou ENI (Ecole Normale de Filles ou Ecole Normale d'Institutrices) se situant au 09, rue de Lille à Rouen. L'épreuve se déroule le 02 mai 1973. La note obtenue est de 03/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 09,75/20.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 8 p. dont 6 p. manuscrites

Nom et Prénom : OLMES Jocelyne

N° d'inscription : 65

Centre d'examen : École normale fille Rouen

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur
16

Note :
03
20

Examen : entrée C.F. du P E G C

Session : 73

Spécialité ou Série : C

Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les /

Composition de MATHEMATIQUES

I. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

$\dot{4} = \{...-6, -1, 4, 9, 13...\}$

Suite des puissances de $\dot{4}$

$\dot{4}^2 = \{...36, 1, 16, 81, \cancel{13}...\} = \dot{1}$ de même : (positifs seulement)

$\dot{4}^3 = \dot{4}$

on aura donc $\dot{4}^{2k+1} = \dot{4}$

$\dot{4}^{2k} = \dot{1}_{(+)}$ selon que l'on aura dans la série 1 ou −1

$\Rightarrow 2^{4p} \equiv 1 \pmod 5$

$2 \equiv 4 \pmod 5$ $\Big\} \Rightarrow 2^{4p+1} = 2^{4p} \times 2 \equiv 4 \pmod 5$

et $3 \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2^{4p+1} + 3 \equiv 4 + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$

II. $f_m : x \longrightarrow \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 4x - (m+1)}$ $\Delta = 5 + m \Rightarrow \begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix} = -2 \pm \sqrt{m+5}$

pour x' et x'' $f_m(x)$ non définie

C_m représentation de f_m dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

1) $x \to \pm\infty$ $f_m(x) \to 1$ $\Rightarrow \exists$ 2 branches infinies au moins

$x \to 0$ $f_m(x) \to -\dfrac{3}{m+1}$

direction de l'asymptote. Cherchons $\dfrac{f_m(x)}{x}$

$\dfrac{f_m(x)}{x} =$ on sait que lorsque $x \to \pm\infty$ $f_m(x) \to 1$

si l'on fait la division de $x^2 - mx + 3$ par $x^2 + 4x - (m+1)$

on obtient $f_m(x) = 1 + \dfrac{(m+4)(1-x)}{x^2 + 4x - (m+1)}$ d'où l'asymptote précédemment

trouvé par la limite $y = 1 \Rightarrow$ asymptote // à $(O, \vec{i})$

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

Pour les valeurs pour lesquelles le dénominateur est défini

on a pour $f_m(x) = 1$: $x^2 - mx + 3 = x^2 + 4x - (m+1)$

$$(m+4)x - (m+4) = 0$$

α) $m = -4$

alors $f_m(x) = 1$ = asymptote

$f_m(x)$ est alors réduit à une droite.

β/ $m \neq -4$

on doit alors avoir $x - 1 = 0$

soit $x = 1$

$\Rightarrow f_m(x) = \dfrac{1 - m + 3}{1 + 4 - m - 1} = 1$ (vérifié car égale a l'ordonnée de l'asymptote)

$\Rightarrow$ point de concours entre $f_m(x)$ et asymptote $M\binom{1}{1}$

1

2) Soient 2 valeurs de m, m_1 et m_2 les 2 courbes C_{m_1} et C_{m_2} passent par un même point $m(x_0, y_0)$ $m_1 \neq m_2$

pour trouver ce point égalisons $f_{m_1}(x_0)$ et $f_{m_2}(x_0)$

$$\frac{x_0^2 - m_1 x_0 + 3}{x_0^2 + 4x_0 - (m_1+1)} = \frac{x_0^2 - m_2 x_0 + 3}{x_0^2 + 4x_0 - (m_2+1)}$$

$(x_0^2 - m_1 x_0 + 3)(x_0^2 + 4x_0 - (m_2 + 1)] = (x_0^2 - m_2 x_0 + 3)[x_0^2 + 4x_0 - (m_1+1)]$

$\cancel{x_0^4} + \cancel{4x_0^3} + x_0^2 m_2 - \cancel{x_0^2} - m_1 x_0^3 - 4m_1 x_0^2 - 3m_2 - \cancel{3} + \cancel{m_1 m_2 x_0} + m_1 x_0 +$

$\cancel{3x_0^2} + \cancel{12x_0} = \cancel{x_0^4} + \cancel{4x_0^3} - x_0^2 m_1 - \cancel{x_0^2} - 4m_2 x_0^2 - m_2 x_0^3 + \cancel{m_1 m_2 x_0} + m_2 x_0$

$+ \cancel{3x_0^2} + \cancel{12x_0} - 3m_1 - \cancel{3}$

$-x_0^3 m_1 + x_0^3 m_2 + 3x_0^2 m_2 - 3x_0^2 m_1 + m_1 x_0 - m_2 x_0 + 3m_1 - 3m_2 = 0$

$(m_2 - m_1)(x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 - 3) = 0$

on doit donc avoir $x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 - 3 = 0$

on connait déjà une solution qui est $x = 1$

soit a mettre $x - 1$ en facteur.

$(x_0 - 1)(x_0^2 - 2x_0 + 3) = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de racine $\Rightarrow$ une seule solution $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $m = 3$

$f_3(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + 4x - 4}$ → $\Delta = \dots$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}\}$ continue et derivable sur $\mathcal{D}$.

$= \mathbb{R} - \{-2(1+\sqrt{2}), -2(1-\sqrt{2})\}$

$f_3'(x) = \dfrac{(2x-3)(x^2+4x-4) - (x^2-3x+3)(2x+4)}{(x^2+4x-4)^2}$

même domaine de definition que $f_3(x)$

le signe de la derivée defendra du signe du numérateur N.

$N = (2x-3)(x^2+4x-4) - (x^2-3x+3)(2x+4)$

$N = \cancel{2x^3} + 8x^2 - 8x - 3x^2 - 12x + 12 - \cancel{2x^3} + 6x^2 - 6x - 4x^2 + 12x - 12$

$N = 7x^2 - 14x = 7(x^2 - 2)$

$f_3'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

pour ces valeurs de x la fonction sera croissante.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{8}$		$-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{8}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
y	1^+	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\sim -1{,}2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sim 0{,}2$	↗	1^-

~~$x = -2-\sqrt{8}$~~ $f_3 \sim \frac{147}{784}$

asympt. $\sim y = 0{,}2x$