Agrégation des Sciences Mathématiques. Session de 1921 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.45
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1921
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1921.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1921.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

1° Trois points A, B, C, fixés sur une droite Δ, sont assujettis à décrire respectivement les trois plans de coordonnées $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Montrer qu'un point quelconque M, fixé sur Δ, décrit un ellipsoïde (E_M) ayant pour centre l'origine O des coordonnées.

Le volume de (E_M) reste constant quand on fait varier l'ouverture du trièdre $Oxyz$.

Le point C, par exemple, ne décrit pas tout le plan des xy, mais reste intérieur à une ellipse (ε) bitangente et extérieure à l'ellipse (ε') que décrit le point C lorsque A et B sont assujettis à décrire oy et ox respectivement.

Dans quel cas les ellipses (ε) et (ε') sont-elles confondues?

2° On supposera, dans tout ce qui suit, les coordonnées rectangulaires.

Soit H la projection orthogonale de O sur Δ et K le milieu de HM. Montrer que lorsque Δ varie, K décrit une surface (Σ_M) normale à Δ en M. La surface (Σ_M) est unicursale. Quel est son degré?

En faisant varier M sur Δ, on obtient une famille d'ellipsoïdes (E_M) dépendant d'un paramètre. Quelle est la condition pour que la courbe caractéristique (Γ) de (E_M) soit réelle?

Les droites Δ correspondant aux points M de (Γ) sont tangentes à (E_M) et engendrent, lorsque M varie sur (Γ), une surface développable. Montrer que si I est le point où Δ touche l'arête de rebroussement on a :

$$\overline{MI}+\overline{MH}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}.$$

3° Soient A, B, C, D, quatre points fixés sur une droite Δ et décrivant respectivement les plans de coordonnées $x=0$, $y=0$, $z=0$, et le plan P d'équation :

$$ux+vy+wz+1=0.$$

Montrer qu'un point quelconque M, fixé sur Δ, décrit une ellipse (ε_M).

La droite Δ reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution (C) dont le demi-angle au sommet sera désigné par V. Quelle est la condition de possibilité du mouvement de Δ?

T. S. V. P.

Le lieu des centres des ellipses (ε_M) est une droite parallèle à l'axe du cône (C). Si ω, ω_0, sont les centres des ellipses (ε_M) (ε_{M_0}) on a la relation :

$$\omega\omega_0 = MM_0 \cos V.$$

4° Que peut-on dire de l'enveloppe du plan Π_M de l'ellipse (ε_M) quand M varie sur Δ?

La caractéristique G du plan Π_M est située dans le plan diamétral conjugué de la direction de l'axe du cône (C) par rapport à l'ellipsoïde (E_M) que décrirait M si le point D n'était plus astreint à décrire le plan P. L'ellipse (ε_M) est homothétique, dans un rapport constant, de la section centrale parallèle faite dans (E_M).

Établir que si (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées des points où les plans Π_M, Π_{M_0} sont osculateurs à l'arête de rebroussement de l'enveloppe de Π_M, on a :

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AM_0}}\right)^3, \quad \frac{y}{y_0} = \left(\frac{\overline{BM}}{\overline{BM_0}}\right)^3, \quad \frac{z}{z_0} = \left(\frac{\overline{CM}}{\overline{CM_0}}\right)^3.$$

5° On considère la surface (S) engendrée par Δ dans son mouvement. Dire, sans former l'équation de (S), quel est le degré de cette surface? Montrer que (S) possède une ligne de points doubles (L). Le plan Π_M coupe (S), en plus de l'ellipse (ε_M), suivant deux droites. Quelle est la condition de réalité de ces deux droites? Celles-ci passent par les points où (ε_M) est rencontrée par la caractéristique G du plan Π_M.

6° Montrer que les génératrices Δ de (S) appartiennent à un complexe linéaire. En utilisant cette propriété, former des équations paramétriques de la ligne double (L) de (S).

Les points A, B, C, D restant toujours fixés sur Δ, quelle surface doit toucher le plan P pour que la droite Δ rencontre, dans son mouvement, une droite fixe? La condition étant remplie, former les équations de cette droite fixe. Quel est alors le lieu des points où passent trois droites Δ?

Nota. — La droite Δ étant orientée, on posera : $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = b$, $\overline{MC} = c$, et : $p = u.\overline{DA}$, $q = v.\overline{DB}$, $r = w.\overline{DC}$.