Agrégation des Sciences Mathématiques. Session normale de 1920 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.39
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1920
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1920.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION NORMALE DE 1920.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

I. Dans un plan orienté on considère deux segments de droite AB, A'B'. Le lieu des points M du plan tels que l'on ait

$$\text{angle AMB} + \text{angle A'MB'} = 0$$

est en général une cubique passant par ABA'B'. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère) il faut et il suffit que les segments AA', BB' aient le même milieu.

Réciproquement si AA', BB' sont deux couples de points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère on a $\widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = 0$ lorsque M décrit la courbe.

II. Étant donné quatre points ABA'B' dans un plan, le lieu des points M de ce plan tels que $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$ (1) est en général une cubique. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère) il faut et il suffit que les segments AB, A'B' aient le même milieu.

Réciproquement étant donné une hyperbole équilatère (H) ayant pour équation $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, il existe une infinité de couples AB A'B' tels que M décrivant (H) on ait la relation (1). Le point A étant choisi arbitrairement, il lui correspond des points *réels* BA'B' déterminés sans ambiguïté par l'intersection de l'hyperbole (H') passant par A ayant pour asymptotes ox oy et de l'ovale de Cassini (Γ) passant par A ayant pour foyers $x = \pm a$ $y = 0$. Où doit se trouver A pour que A'B' viennent se confondre avec A et B ? Déduire de ce cas et de la relation (1) appliquée à la limite que A et B étant deux points de (H) diamétralement opposés on peut leur associer une direction Δ telle que en désignant par α β les angles de MA, MB avec Δ on ait $\frac{MA}{\cos\alpha} = \frac{MB}{\cos\beta}$ lorsque M décrit (H). Vérifier ensuite directement cette propriété.

III. L'hyperbole (H') et la cassinienne (Γ) se coupent en 4 points réels AB, A'B' et 4 points imaginaires A_1B_1, A_2B_2 deux à deux symétriques par rapport au centre O de (H). Montrer que les quatre droites AB, A'B' etc. passant par O sont deux à deux rectangulaires. Exprimer explicitement en fonction des coordonnées (α β) du point A celles de B, A', B'.

T. S. V. P.

Quel est le lieu des points $A'B'$ lorsque A décrit une droite Δ issue de O? Quels sont les arcs utiles de ce lieu? Quel est le lieu de $A'B'$ lorsque A décrit un cercle de centre O?

IV. Soit AB, $A'B'$ deux segments ayant O pour milieu. On désigne par $\Gamma_A\,\Gamma_B$ deux cercles centrés en A et B orthogonaux au cercle

$$x^2+y^2-K=0,$$

par $\Gamma_{A'}\Gamma_{B'}$ deux cercles centrés en A' et B' orthogonaux au cercle $x^2+y^2-K'=0$ $(K'\neq K)$. Déterminer les points $ABA'B'$ de sorte que, M décrivant (H), on ait la relation $\varpi_A\varpi_B=\varpi_{A'}\varpi_{B'}$, en désignant par $\varpi_A\varpi_B$ etc. les puissances du point M par rapport aux cercles $\Gamma_A\Gamma_B$ etc.

Les lieux de AB, $A'B'$ sont deux hyperboles conjuguées et AB, $A'B'$ en sont des diamètres conjugués.

V. Étant donné une quadrique (Q) peut-on trouver deux couples de points AB, $A'B'$ tels que M décrivant (Q) on ait $MA\cdot MB=MA'\cdot MB'$. Montrer que (Q) doit être un hyperboloïde à deux nappes dont une hyperbole principale est équilatère. Cette condition étant remplie et en outre une certaine inégalité étant vérifiée, il existe une infinité de couples AB $A'B'$ de points *réels*. Leur lieu est une ellipse (E) et $AB\,A'B'$ forment un faisceau harmonique avec les diagonales du rectangle construit sur les axes de (E).

On considère une biquadratique sphérique, supposée réelle, ayant pour équations : $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ $\quad x^2+y^2+z^2-R^2=0$. Existe-t-il des points $AA'BB'$ tels que M décrivant cette courbe on ait : $MA\cdot MB=MA'\cdot MB'$? Trouver tous les couples tels que les segments AB, $A'B'$ aient pour milieu le centre O de la sphère.

Nota. — Il sera commode d'employer les coordonnées polaires pour la recherche des lieux des IV^e et V^e parties.