Agrégation des Sciences Mathématiques. Concours de 1912 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.29
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1912
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1912.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DE 1912.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

I. Si, dans une équation du troisième degré

$$(1) \qquad z^3 - p_1 z^2 + p_2 z - p_3 = 0,$$

le coefficient p_1 est nul, la fonction $z_1^2 - z_2 z_3 = z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2$ non symétrique par rapport aux lettres est équivalente à une fonction symétrique des racines de l'équation. Le cas où $p_1 = 0$ est-il le seul où il existe un polynôme homogène du second degré à trois variables qui jouisse de la même propriété ?

Le coefficient p_1 n'étant pas nul, former l'équation (2) qui a pour racines les valeurs que prend la fonction $x^2 + xy + y^2$ quand on y remplace x et y par deux racines quelconques de l'équation (1). L'équation (2) peut-elle être équivalente à l'équation (1) dont on l'a déduite ?

II. Les médianes d'un triangle ABC se coupant en un point O, on fait tourner ce triangle de 60° autour de O dans un sens et dans l'autre; on obtient ainsi deux nouvelles positions $A'B'C'$, $A''B''C''$ du triangle (A' et A'' étant les nouvelles positions du point A). Soient A'_1, A''_1 les milieux de BA', BA''; B'_1, B''_1, les milieux de CB', CB''; C'_1, C''_1, les milieux de AC', AC''; A'_2, A''_2, les milieux de CA', CA''; B'_2, B''_2, les milieux de AB', AB''; C'_2, C''_2, les milieux de BC', BC''. Montrer que les angles $A'_1OA''_1$, $A'_2OA''_2$, $B'_1OB''_1$, $B'_2OB''_2$, $C'_1OC''_1$, $C'_2OC''_2$ ont même bissectrice et qu'il existe sur cette bissectrice deux points ω', ω'' symétriques par rapport à O, tels que les quadrilatères $\omega'\omega''A'_1A''_1$, $\omega'\omega''A'_2A''_2$, $\omega'\omega''B'_1B''_1$ . . . soient inscriptibles.

Démontrer qu'il existe un triangle $A_1B_1C_1$ homothétique du triangle ABC par rapport à O et tel que, si l'on prend les inverses A_2, B_2, C_2 des sommets A_1, B_1, C_1, le pôle d'inversion étant soit ω', soit ω'', le centre des moyennes distances des points A_2, B_2, C_2 est soit ω', soit ω''.

(On pourra représenter les différents points par leurs affixes, rapportées à un système d'axes rectangulaires ayant O pour origine, et utiliser la propriété indiquée au n° I.)

III. On considère les triangles ABC variables, tels que les points ω', ω'' qui leur correspondent soient fixes et pour lesquels le produit des lon-

gueurs des médianes est donné. Trouver le lieu des sommets de ces triangles. (On pourra se borner à construire ce lieu dans le cas où les données sont telles que l'un des triangles ABC ait deux sommets confondus.)

Étant donné un point A du lieu, construire le triangle ABC qui lui correspond.