
Agrégation des Sciences Mathématiques. Session spéciale d'octobre 1919 : problème de calcul différentiel et intégral

Numéro d'inventaire : 2016.90.36

Type de document : texte ou document administratif

Éditeur : Ministère de l'Instruction publique

Période de création : 1er quart 20e siècle

Date de création : 1919

Matériau(x) et technique(s) : papier

Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.

Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm

Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1919.

Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets

Calcul et mathématiques

Filière : Supérieure

Autres descriptions : Langue : français

Nombre de pages : Non paginé

Commentaire pagination : 2 p.

ill.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION SPÉCIALE D'OCTOBRE 1919.

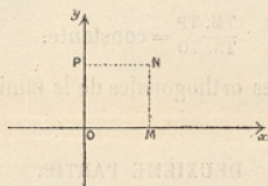
PROBLÈME

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

1° Soit $f(\zeta)$ une fonction de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$. Soit C le contour du carré OMNP dont les sommets ont respectivement pour affixes les quatre nombres complexes

$$0, 1, 1+i, i.$$



Montrer que si $f(\zeta)$ est sur C une fonction de ζ bien déterminée et bornée qui est continue sur C sauf peut-être aux sommets, l'intégrale curviligne

$$\int_{Cz-\zeta} f(\zeta) d\zeta$$

est une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ qui est holomorphe en tout point n'appartenant pas au contour C .

2° Calculer effectivement l'intégrale (sous forme de combinaison algébrique de fonctions élémentaires de z) dans les trois cas suivants :

I. $f(\zeta) = \zeta$ sur tout le contour C

II. $f(\zeta) = 1$ quand $\eta = 0$ ou $\eta = 1$

$= 0$ sur tout le reste du contour C

III. $f(\zeta) = \xi$, partie réelle de ζ , sur tout le contour C .

(Le sens positif de parcours sur C est celui dans lequel on rencontre successivement les points O, M, N, P .)

T. S. V. P.

3° Montrer que dans ces trois cas l'intégrale est une fonction continue dans tout le plan sauf *peut-être* sur la ligne polygonale ouverte OMNP d'origine O, extrémité P.

4° Désignons par $2i\pi F(z)$ la valeur de l'intégrale calculée quand $f(\zeta) = \xi$ (cas III), en un point z situé en dehors de la ligne ouverte OMNP. On demande de calculer la discontinuité éprouvée par $F(z)$ en traversant cette ligne polygonale (de l'intérieur du carré C vers l'extérieur). Le calcul sera effectué en se servant de l'expression analytique de $F(z)$ obtenue au paragraphe 2°, III.

5° Développer $F(z)$ en série suivant les puissances entières de $\frac{1}{z}$. Déterminer le domaine de convergence de la série obtenue.

6° Calculer la dérivée F'_z de $F(z)$. Séparer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Remarque. — On aura soin pour ces différentes questions de préciser, quand il y a lieu, quelles sont celles des branches des fonctions élémentaires multiformes employées pour calculer $F(z)$ et F'_z qu'il faut considérer pour que les égalités formelles obtenues soient exactes.

7° On considère dans le plan xoy les courbes S telles que si T est un point variable sur l'une de ces courbes Γ , l'on ait sur S

$$\frac{TM \cdot TP}{TN \cdot TO} = \text{constante.}$$

Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes S.

DEUXIÈME PARTIE.

1° Montrer que l'intégrale $\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$, où $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, croît indéfiniment lorsque λ tend vers zéro.

2° On considère l'intégrale

$$J(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + \varepsilon \cos^2 x}}$$

où ε est un nombre > 0 . Montrer que si ε tend vers zéro la quantité $J(\varepsilon)$ croît indéfiniment.

3° En établir l'expression approchée

$$J(\varepsilon) = \log \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} + \omega$$

où ω est infiniment petit en même temps que ε .

