# Mathématiques I

**Numéro d'inventaire** : 2025.0.98
**Auteur(s)** : Michel Quellier
**Type de document** : travail d'élève
**Période de création** : 3e quart 20e siècle
**Date de création** : 1956-1957
**Matériau(x) et technique(s)** : papier vergé **|** plume de métal
**Description** : Cahier à couverture cartonnée verte. Reliure métallique en spirale. Réglure petits carreaux 5 x 5 mm sans marge. Pontuseaux verticaux et vergeures horizontales.
**Mesures** : hauteur : 27 cm ; largeur : 21 cm
**Notes** : Il s'agit du cahier de Mathématiques de Michel Quellier, élève en classes préparatoires Mathématiques spéciales (seconde année de la filière de classes préparatoires aux grandes écoles ou CPGE), scolarisé au lycée Pothier d'Orléans durant l'année 1956-1957, dans la perspective du passage du concours de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris. Contenu (en sommaire dans les dernières pages du cahier) Les nombres irrationnels : Coupure ; opération Analyse combinatoire : Formule de binôme ; Formule de Leibnitz Limites : Fonction continue ; Fonction exponentielle ; Fonction logarithme ; Fonction puissance ; Infiniment petit - Infiniment grand ; équivalence ; Parties principales Nombres complexes : Racine n ième ; Formule de Moivre Division des polynômes : PGCD; PPCM Déterminants : Matrices ; Système d'équations linéaires ; Formes linéaires Vecteurs : Produit scolaire ; Trigonométrie sphérique ; Produit vectoriel ; Produit mixte ; Barycentre ; Changement de coordonnées ; Champs linéaires de vecteurs ; Espaces à n dimensions Géométrie analytique : La droite dans le plan ; Plan dans l'espace ; Cercle dans le plan ; Transformations planes usuelles ; Sphère ; Cercle dans l'espace ; Coordonnées homogènes ; Eléments imaginaires ; Droite isotrope ; Points cycliques Dérivée de l'exponentielle et du logarithme Fonctions inverses : Arc sin x ; Arc cos x ; Arc ty x ; Lignes hyperboliques Fonction y = f(x) : Téorème de Rolle des accroissements finis ; Formule de Taylor ; Maclaurin ; Règle de L'Hôpital Développements limités Equations algébriques f(x) = 0 : Théorème de d'Alembert - racines multiples ; Fonctions symétriques ; Elimination ; Racine commune ; Racine double ; Equations réciproques ; Résolution de x3 + px + y = 0 ; Théorème de Descartes Décomposition des fractions en éléments simples Fonction de plusieurs variables : Dérivées - Continuité ; Théorème des fonctions composées ; Théorème des accroissements finis ; Formule de Taylor ; Forme polaire Fonctions homogènes : Formule d'Enler ; Fonctions implicites ; Maxima et minima d'une fonction de plusieurs variables Différentielles : Changement de variable ; Courbes paramétriques ; Courbes gauches ; Coordonnées polaires ; Courbes définies par une équation implicite f(x,y) = 0 Lieux géométriques dans le plan
**Mots-clés** : Calcul et mathématiques
**Lieu(x) de création** : Orléans
**Autres descriptions** : Langue : Français
Nombre de pages : Paginé
Commentaire pagination : 190 p. dont 183 p. manuscrites

1

# Les Nombres irrationnels

**Corps de nombres** : famille de nombres qui se prêtent à des opérations donnant des nombres du même corps

**Principaux corps** - entiers positifs : se prêtant à l'addition, à la multiplication et qqfois à la soustraction et à la division

- entiers positifs et négatifs : se prêtant en plus tjrs à la soustraction et qqfois à la division
- rationnels, de la forme $\pm \frac{p}{q}$ : se prêtant à la puissance mais pas tjrs à l'extraction de racine

**Representation**

Sur un axe on peut representer les nbres rationnels mais il y a des points qui ne sont pas representés


× On appelle nbre réel, tout symbole qui sera capable de définir un point de l'axe

× Les nombres rationnels sont un cas particulier des nombres réels ; les conventions seront identiques à celles des nombres rationnels

× Si un nbre $x$ rationnel ou irrationnel représente le point $M$ et si le nbre $x'$ represente le nbre $M'$, on dira que $x'$ est plus grand que $x$ si $M'$ est à droite de $M$

× En mettant les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$ bout à bout on obtient un point $M''$ representant le nbre $x''$ et $x'' = x + x'$

× Le nbre $x' - x$ est représenté par le vecteur $\vec{MM'}$

**Définition d'un nombre réel par une coupure**

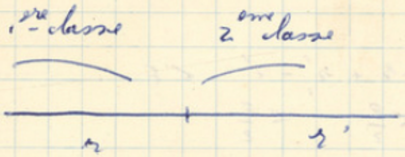
Si on partage l'ensemble des nombres irrationnels en 2 classes :

= tel que ts les nbres soient classés

= et tel que tt nbre de la 1ère classe soit inférieur à tt nbre de la 2ème classe

On peut affirmer qu'il existe un nbre $x$ et un seul qui soit à la fois supérieur ou égal à tous les nbres de la 1ère classe et $\leq$ à ts les nbres de la 2ème classe

–




Le domaine occupé par $r$ est à gauche du domaine occupé par $r'$.

Ils ne se chevauchent pas car un nbre $r'$ serait $<$ à un nbre $r$

Ils sont donc séparés par un point ou un segment

Or l'hypothèse du segment est fausse car il y aurait des nbres non classés.

Ce point point unique $M$ défini un nombre $x$ qui par définition $\geq r$ et $\leq r'$

– La différence entre une coupure définissant un nbre irrationnel et celle définissant un nbre rationnel est que si elle définit un nbre rationnel, qui est classé. Ce nbre est donc est le plus de la $1^{ère}$ classe ou le plus petit de la $2^{ème}$ classe.

$$\left.\begin{array}{l} r \leq 0 \\ r' \geq 0 \end{array}\right| \text{ définissent le nombre zéro}$$

## Coupure restreinte

Une coupure restreinte est définie par 2 ensembles de nombres réels $x$ et $x'$. On n'impose pas à ts les nombres d'être classés

- Tout nombre $x$ plus petit que tout nombre $x'$
- $x' - x$ peut être rendu inférieur à tout nombre positif donné

- Il existe un nombre réel et un seul X qui est supérieur ou égal à ts les $x$ et inférieur ou égal à ts les $x'$

M se déplaçant de gauche à droite aussi longtemps qu'il rencontrera des points du $1^{er}$ ensemble
M' se déplaçant de droite à gauche dans le $2^{ème}$ ensemble.
M et M' ne se rencontreront pas. S'ils se croisaient on aurait $x' < x$ contraire à l'hypothèse. Les 2 ensembles sont donc séparés par un point ou par un segment où il n'y aurait ni $x$ ni $x'$
donc dans ce cas $x' - x$ > à la longueur du segment
Donc les 2 ensembles sont séparés par un point P.

- Parmi les coupures restreintes il y a les approximations décimales
- On n'oblige pas ts les nbres à être classés

## Opérations

Graphiquement addition et soustraction.

**Addition** Etant donné deux nombres réels $x$ et $x'$, le premier défini

par $r$ et $r_1$ | $r_1 - r$
le $2^{em}$ par $r'$ et $r'_1$ | $r'_1 - r'$ } peut être rendu inférieur à tt $\varepsilon$ donné

tous les nombres $r + r'$, et $r_1 + r'_1$ forment 2 nouveaux ensembles définissant une coupure $r + r' < r_1 + r'_1$

$$\text{et} \quad r_1 + r'_1 - (r + r') = \underbrace{r_1 - r}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{r'_1 - r'}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Cette coupure définit $x + x'$

**Produit** (nbres positifs)
$r r'$ et $r_1 r'_1$ définissent une coupure

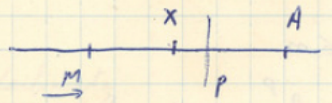
**Racine $p^{ième}$ d'un nombre positif**

$$\sqrt[p]{x}$$

nombre $r^p \leq x$ et $r'^p > x$ coupure définissant. $\sqrt{x}$

Etant donné un ensemble de nombres réels $x$ on dit que cet ensemble possède un nombre majorant A si tous les nombres de l'ensemble sont $\leq A$.
De même un ensemble donné possède un nombre minorant B si tous les nombres de cet ensemble sont $\geq B$

Etant donné un ensemble possédant un nombre majorant A, on peut trouver un nombre X qui est également majorant et tel qu'il existe un $x$ au moins supérieur à $X - \varepsilon$ aussi petit que soit $\varepsilon$




M se déplaçant de gauche à droite aussi longtemps qu'il rencontre des nombres $x$
Un autre point partant de A vers la gauche aussi longtemps qu'il ne rencontrera pas de $x$
on a la définition d'une coupure.
X est le nbre majorant le plus petit possible

On l'appelle la borne supérieure stricte de l'ensemble (zéro est le nombre majorant des nombres $<0$)

Il peut arriver que la borne appartienne ou non à l'ensemble.

Même propriété avec le minorant.