Examen de PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.167
Auteur(s) : Daniel Lecouturier
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1975
Matériau(x) et technique(s) : papier | encre noire
Description : Cinq copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Daniel Lecouturier. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques-Sciences physiques-Technologie). L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à la salle de la Bourse, probablement à la Halle aux toiles ou au Palais des Consuls de Rouen. L'épreuve se déroule en 1975. La note obtenue est de 12,5/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 08,5/20.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 20 p. dont 17 p. manuscrites

Nom et Prénom : LECOUTURIER Daniel TC

N° d'inscription : 66 Centre d'examen : Salle de la Bourse

collez ici a...

Visa du Correcteur

Note : 12,5 / 20

Examen : de PEGC Session : 1975

Spécialité ou Série : 3. Maths - Physique (Technologie)

Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les 1/5

Composition de Mathématiques.

Premier Exercice.

$18 \equiv 5$ [mod 13] en effet : $18 = 1.13 + 5$.

Or, nous savons que : $a \equiv b \pmod p \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod p$

Donc : $18 \equiv 5\ (13) \Leftrightarrow 18^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}\ (13)$.

de même : $44 \equiv 5\ (13)$. en effet : $44 = 3.13 + 5$.

D'où : $44^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}\ (13)$.

$96 \equiv 5\ (13)$ en effet : $96 = 7.13 + 5$.

D'où : $96^{4n+2} \equiv 5^{4n+2}\ (13)$.

Si nous retranchons les 2 dernières congruences modulo 13 à la première congruence modulo 13, nous obtenons une congruence modulo 13 qui s'écrit :

$18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3.96^{4n+2} \equiv 5^{4n+1} - 5^{4n-1} - 3.5^{4n+2}\ (13)$

soit : $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3.96^{4n+2} \equiv 5^{4n-1}(5^2 - 1 - 3.5^3)$ [13]

Si nous développons le terme entre parenthèses, nous obtenons : $5^2 - 1 - 3.5^3 = 25 - 1 - 3.125 = 24 - 375 = -351$

Donc : $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3.96^{4n+2} \equiv -5^{4n-1}.351$ [13].

Or : $351 = 13.27 + 0$ Donc : $351 \equiv 0$ [13].

soit encore : $5^{4n-1}.351 \equiv 0$ [13].

La relation de congruence est transitive :

N. B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

[redacted]

3

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \times 96^{4n+2} \equiv 0 \, [13]$
ce qui signifie que, quel que soit n entier naturel non nul, l'expression : $(18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3.96^{4n+2})$ est divisible par 13.

Second Exercice.

$z = x + iy$

1). $|z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Leftrightarrow |x + iy - 2 + i| = |x + iy - 1 - i|$

$\Leftrightarrow |(x-2) + (y+1)i| = |(x-1) + (y-1)i|$

Or : les modules des nombres complexes sont des quantités positives.
On peut donc écrire :

$|z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Longleftrightarrow |(x-2) + (y+1)i|^2 = |(x-1) + (y-1)i|^2,$
$z = x + iy.$

On sait que : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, soit : $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Donc : $|z - 2 + i| = |z - 1 - i| \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$
$z = x + iy.$

Soit :

$(x-2)^2 - (x-1)^2 = (y-1)^2 - (y+1)^2.$

En factorisant ces 2 identités remarquables :

$[\cancel{x} - 2 - \cancel{x} + 1][x - 2 + x - 1] = [\cancel{y} - 1 - \cancel{y} - 1][y - 1 + y + 1]$

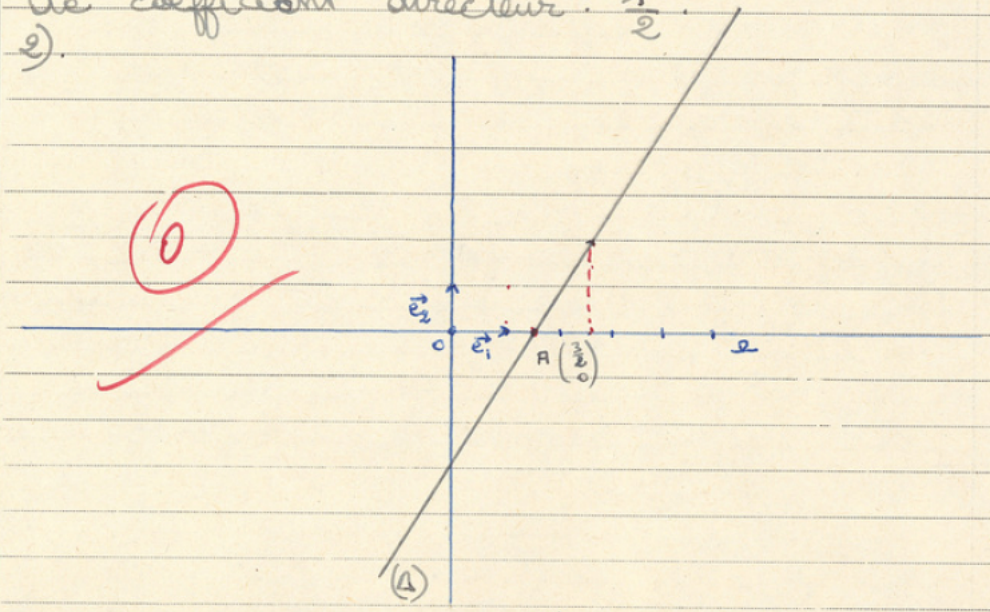
1

$\Leftrightarrow (-1).(2x-3) = (-2)(2y)$
$\Leftrightarrow 2x - 3 = 4y$
$\Leftrightarrow 2x - 4y - 3 = 0.$

Cet ensemble de points M de coordonnées x et y du plan est une droite affine, de vecteur

[redacted]

directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, passant par le point $A\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$,
de coefficient directeur : $\frac{1}{2}$.
2).



Pour ~~con~~ tracer cette droite, on place le point A, puis on construit le vecteur $\vec{u} = \vec{e_1} + 2\,\vec{e_2}$, en ce point A'.
Tous les points M de la droite (Δ) sont tels que :

$\vec{AM} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3). $\forall z \in \mathbb{C}$: $f(z) = z' = (1+i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.
Recherchons le ou les points ~~M₀~~ Ω d'affixes z_0, invariants par f. ~~Leur~~ affixe z_0 sera telle que :

$$f(z_0) = z_0 = (1+i\sqrt{3})z_0 - 5i\sqrt{3}.$$
$$z_0 = (1+i\sqrt{3})z_0 - 5i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow z_0 - z_0 - i\sqrt{3}z_0 = -5i\sqrt{3}.$$
$$\Leftrightarrow +i\sqrt{3}z_0 = +5i\sqrt{3}.$$
$$\Leftrightarrow z_0 = 5.$$

Il n'y a qu'un seul point invariant Ω d'affixe