PEG

Numéro d'inventaire : 2024.0.166
Auteur(s) : Marie-Madeleine Boitard
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1975
Matériau(x) et technique(s) : papier | encre noire
Description : Trois copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), de la candidate Marie-Madeleine Boitard. La spécialité de l'élève est Mathématiques-Sciences-physiques, section 3 (probablement en bac C). L'épreuve est une composition de Mathématiques. Le centre d'examen est à la préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en mai 1975. La note obtenue est de 00/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 07/20. La copie a été sujette à un commentaire du correcteur.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 12 p. dont 9 p. manuscrites

Nom et Prénom : BOITARD Marie Madeleine.

N° d'inscription : 176 Centre d'examen : Préfecture.

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Examen : PEG. Session :

Spécialité ou Série : Mathématiques. Physique.

Si votre composition comporte plusieurs feuillets, numérotez-les 1/3

Note : 0/20

Composition de Mathématiques.

Aucune méthode véritablement mathématique n'est mise en jeu

II^e problème

1^ère partie

Soit h l'application $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \rightsquigarrow \frac{x}{x+3}$.

1°) Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$
on a $|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|$

$$h(x) = \frac{x}{x+3} \qquad h(y) = \frac{y}{y+3}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{x}{x+3} - \frac{y}{y+3} = \frac{x(y+3) - y(x+3)}{(x+3)(y+3)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{3(x-y)}{(x+3)(y+3)}$$

$$\frac{h(x) - h(y)}{x-y} = \frac{3}{(x+3)(y+3)}$$

si x et y tendent vers 0 alors $\frac{3}{(x+3)(y+3)} \simeq \frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$.

N. B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

[redacted]

0

~~Ce qui nous donne.~~

$$\cancel{\left|\frac{h(x)-h(y)}{x-y}\right| \leqslant \frac{1}{3}}.$$

$$\text{et } \boxed{\cancel{|h(x)-h(y)|} \leqslant \frac{1}{3}|x-y|}$$

2°) Montrons que $h[0,1] \subset [0,1]$.

pour $x=0 \Longrightarrow h(x) = \dfrac{x}{x+3}$

$$h(0) = \frac{0}{0+3} = 0.$$

pour $x = 1 \Longrightarrow h(1) = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$.

si $x = 0{,}2 \Longrightarrow h(0{,}2) = \dfrac{0{,}2}{0{,}2+3} = \dfrac{0{,}2}{3{,}2} = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16} = 0{,}06$.

on constante que pour n'importe quelle valeur de $x \in [0,1]$ $h(x)$ reste inférieur à $\dfrac{1}{4}$ et supérieur à 0.

!

donc $h[0,1] = \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$

et par suite $\boxed{\left[0, \dfrac{1}{4}\right] \subset [0,1]}$

3°) soit $a \in [0,1]$. et $n \rightsquigarrow x_n$ une suite avec $x_0 = a$

$$x_{n+1} = h(x_n).$$

[redacted]

Nous savons que $|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|$.

si $h(x)$ est remplacé par $h(x_n)$.

$$x_{n+1} = h(x_n) = \frac{x_n}{x_n + 3}$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 3}.$$

On a $x_1 = \dfrac{x_0}{x_0 + 3}$.

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1 + 3} = \frac{x_0}{(x_0+3) \times \left[\frac{x_0}{x_0+3} + 3\right]} = \frac{x_0}{x_0 + 3(x_0+3)}$$

$$x_2 = \frac{x_0}{4x_0 + 9}.$$

$$x_3 = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \frac{x_0}{4x_0+9 \times \left[\frac{x_0}{4x_0+9} + 3\right]} = \frac{x_0}{x_0 + 12x_0 + 27}$$

$$x_3 = \frac{x_0}{13x_0 + 27}.$$

$$x_4 = \frac{x_0}{13x_0+27 \times \left[\frac{x_0}{13x_0+27} + 3\right]} = \frac{x_0}{x_0 + 39x_0 + 81} = \frac{x_0}{40x_0 + 81}$$

$$x_n = \frac{x_0}{\frac{3^n-1}{2}x_0 + 3^n} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x_1}{\frac{3^n-1}{2}x_1 + 3^n}$$