Entrée dans centre PEGC

Numéro d'inventaire : 2024.0.134
Auteur(s) : Hervé Majorel
Type de document : travail d'élève
Période de création : 4e quart 20e siècle
Date de création : 1974
Matériau(x) et technique(s) : papier | encre bleue
Description : Quatre copies doubles d'examen à simple lignage avec partie supérieure à massicoter.
Mesures : hauteur : 31,1 cm
largeur : 24 cm
Notes : Il s'agit de la copie d'examen au concours d'entrée dans les centres PEGC (Professeur d'Enseignement Général de Collège), du candidat Hervé Majorel. L'auteur est alors élève en baccalauréat C (Mathématiques Physique et Technologie), catégorie 3 section 3. L'épreuve est une composition de mathématiques. Le centre d'examen est à la Préfecture de Rouen. L'épreuve se déroule en juin 1974. La note obtenue est de 10/20, la moyenne du lot de copies dont elle est issue est de 03,8/20.
Mots-clés : Compositions et copies d'examens
Formation initiale et continue des maîtres (y compris conférences pédagogiques), post-élémentaire
Lieu(x) de création : Rouen
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 16 p. dont 13 p. manuscrites

Nom et Prénom : MAJOREL Hervé

N° d'inscription : 220 Centre d'examen : Préfecture

collez ici après avoir rempli l'en-tête

Visa du Correcteur

Examen : Entrée dans centre PEGC. Session : 1974

Spécialité ou Série : section III

Si votre composition comporte plusieurs feuillets. numérotez-les 1 / 4

Note : 10 / 20

Composition de

$h(x) = \text{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} + \text{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$

La fonction Arcsin est définie de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$
La fonction Arccos est définie de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$

D'où h sera définie pour

$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$

- $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x$ (car $1+x^2>0$)
  $\Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x$
  $\Leftrightarrow 0 \leq x^2+2x+1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ toujours vérifié

- $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 1+x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ toujours vérifié

- $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 1-x^2 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2$
  $\Leftrightarrow -2 \leq 0x^2$ toujours vérifié

0,5

- $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1-x^2 \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2$ toujours vérifié

Cette fonction est ~~déf~~ définie sur tout $\mathbb{R}$.

N. B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

[redacted]

2) La fonction va être continue comme composée de fonctions continues

$x \mapsto 2x$ $\quad x \mapsto 2x$ $\quad$ / ces 2 fonction continues sur $\mathbb{R}$.

$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue.

La fonction Arcsin est continue. Or la composé de (pom o) des 2 fonctions continues est continue $\Rightarrow$ o ~~f(x)~~ : $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2}$ et continue

De même pour $\operatorname{Arccos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

La somme de 2 fonctions continues est continue $\Rightarrow$ h est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3) Posons $f(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\qquad$ ~~R~~ $g(x) = \operatorname{Arccos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

. La fonction . ~~o~~ f est une fonction impaire $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$

. La fonction g est une fonction paire $(g(x) = g(-x)) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

~~qd $x \to +\infty$~~ $\cancel{\lim \dfrac{2x}{1+x^2}}$ $\cancel{\lim \dfrac{2x}{x^2}}$ $\cancel{= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x}}$ $= 0$ $\quad \dfrac{2x}{1+x^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$

D'ou $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 + k\pi$ ~~&~~ $\quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\sim \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Arcsin} \dfrac{2}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 + k'\pi$ $\qquad$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

. $\lim \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arccos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \sim \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Arccos}(-1) = \pi + 2d\pi$ $\qquad d \in \mathbb{Z}$

$= (2d+1)\pi$

[redacted]

d'où : $\lim\limits_{x \to \infty} \text{Arcco} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi + 2d\pi = (2d+1)\pi$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) + \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b\pi + (2d+1)\pi$

$= (2d+b+1)\pi$

$= \boxed{\mu\pi} \qquad \mu \in \mathbb{Z}$

De même pour $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ b est remplacé par b' et μ par μ' $\qquad \mu' \in \mathbb{Z}$

2/. La fonction dérivée de Arccos y : $\frac{\pm 1}{\sqrt{1 \mp y^2}}$

Elle est donc définie uniquement si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ existe et si $1-y^2 \geq 0$

Ici $1-y^2 = 1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$

qui n'est toujours définie et $\geq$ mais $\neq 0$ et pour $x \neq \pm 1$.

. La dérivée de Arccos y est : $-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

défini si $1-y^2 \neq 0$ et si $1-y^2$ existe, $1-y^2 > 0$ $\quad 1-y^2 = 1 - \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$ $\neq 0$ [illegible] de 2 nombres positifs

toujours vérifié dans $\mathbb{R}$

$\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{(1+x)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$

$1-y^2$ est défini car $(1+x^2)$ toujours $\neq 0$. $\quad 4x^2 \geq 0 \qquad 4x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$D(h) = \mathbb{R} - \{-1, 0, +1\}$

1

bis