Mécanique

Numéro d'inventaire : 2015.8.5612
Type de document : travail d'élève
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1901
Matériau(x) et technique(s) : papier ligné, papier vergé, papier cartonné
Description : Cahier agrafé, couverture en papier cartonné orange, impression en noir, 1ère de couverture avec en haut à gauche la même signature manuscrite plusieurs fois, à droite le titre à l'encre noire, au centre une grande illustration représentant Du Guesclin avec son nom imprimé dessous. Réglure de petits carreaux, encre bleue, noire, rose.
Mesures : hauteur : 22 cm ; largeur : 17,4 cm
Notes : Cahier de cours de mécanique rationnelle: vecteurs et systèmes de vecteurs, compléments de cinématique, force vive.
Mots-clés : Mécanique (comprenant la dynamique des fluides)

Méca Rationnelle (1

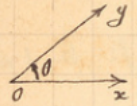
Giraud
le 4/12/21

Introduction

Ch. 1 ~ Vecteurs et systèmes de vecteurs. –

13.11

Définition. si le vecteur a une origine bien déterminée : vecteur lié.
si au contraire le pt d'application est arbitraire sur le support du vecteur : on dit que c'est un ~~vecteur~~ glissant. Enfin si le point d'application est tout à fait arbitraire, la grandeur la direction et le sens de ce vecteur étant bien déterminées, on dit que l'on a affaire à un vecteur libre : corps animé d'un mouvement de transl. tous les points ayant au même instant même vitesse.
Somme géométrique de vecteurs : c'est un vecteur libre.
Produit d'un vecteur par un nombre. Les deux vecteurs $\vec{V}$ et $m\vec{V}$ sont portés par des droites parall. le rapport de leurs longueur étant $|m|$ et le sens étant le même si $m > 0$, sens contraire si $m < 0$. $m = -1$: couple. Vecteurs opposés.
Produit de vecteurs : les vecteurs sont considérés comme libres. deux façons.
{Scalaire $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ le résultat du produit est un nombre
{Vectoriel $V_1 \wedge V_2$. le résultat est un vecteur
Scalaire : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1 \cdot V_2 \cos\theta$ θ est l'angle des vecteurs.



en mesurant les vecteurs sur deux axe on a aussi le produit des mesures algèb. multiplié par le cosinus de l'angle des direct. > 0 des axes.
$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ = produit alg. de longueur des vecteurs par la proj. de l'autre sur lui. Conséquence : si $\vec{V_1} = \vec{V'_1} + \vec{V''_1}$, le produit scalaire est distributif.
$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V'_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V''_1}\, \vec{V_2}$.
si les axes étant rect. les deux vect. ont pr compts resp. $X_1 Y_1 Z_1$ $X_2 Y_2 Z_2$
la valeur du produit scalaire : $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$.
Le produit scal. est indt de l'ordre des facteurs.
Vectoriel : on ne peut le définir que si l'on a choisi un sens > 0 de rotation. sa nature est ≠ de ceux dont nous partons. D'où la distinction entre vecteur polaire et axial.
Un vecteur polaire est un vecteur dont la déf. ne dépend pas du sens de rotation ; le vecteur axial en dépend : tels sont le vectoriel, le

18

en fais^t la somme : $\mathcal{M}^t_{o'} = \mathcal{M}^t_o + \mathcal{M}^t_{o'}\,\overrightarrow{oR}$ $\quad\overrightarrow{oR}$ étant la résultte du torseur en o.

$$\overrightarrow{o'G'} = \overrightarrow{oG} + \mathcal{M}^t_{o'}\,\overrightarrow{oR} \,. \qquad (1)$$

car $M^t_{o'}\overrightarrow{v_1} + M^t_{o'}\overrightarrow{v_2} + \dots M^t_{o'}\overrightarrow{v_n} = M^t_{o'}\,\overrightarrow{oR}$ d'après le th de Varignon

Étant donné un torseur qque donnant en o le m^t oG, et la résultante $\vec{V}$ en o, on a en o' le $M^t_{o'}$ donné par (1).

Conséquence : si deux torseurs ont mêmes résultte et m^t en un pt o, ils ont mm m^t en tout pt de l'espace d'après la relation (1). Les deux torseurs sont alors dits équivalents.

Propriété fondamentale : Définition des opérations élémentaires.

1°) faire glisser un vecteur sur sa ligne d'action
2°) remplacer plusieurs vecteurs ayt mm pt d'applicat. par leur résultante

ou inversement ; ces opérat. élém. ne modifient ni la résultte ni le m^t. de sorte que deux torseurs tels que l'on passe de l'un à l'autre par des opérat élém st équivalents. R^t si deux torseurs sont eq^s on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires.

St deux torseurs équiv^ts $T\ T'$ formés par les vect. $\overrightarrow{v_1} \dots \overrightarrow{v_n}$ $\ \overrightarrow{v'_1} \dots \overrightarrow{v'_p}$. Je pars du sgt T et par des opérat. élém. je passe à T' j'ajoute à T les vecteurs de T' et les vecteurs opposés : $-\overrightarrow{v'_1} \dots -\overrightarrow{v'_p}$. Je considère maintenant l'ensemble $T + (-T')$ c'est un torseur dt la résultte $= 0$, le m^t est nul en tt pt. on peut remplacer tous ces vecteurs par deux, par des opérations élémentaires, $\overrightarrow{v_1}$ et $-\overrightarrow{v_1}$ car leur résultte $= 0$; dc + le m^t /à l'origine de $\overrightarrow{v_1}$ de l'autre vecteur $-\overrightarrow{v_1}$ est nul, dc ces deux vect. st portés par le mm dte ; dc on peut leur donner le mm pt d'applicat. et les supprimer car leur résultte $= 0$. Il ne reste donc bien T'.

Dc en donnant la résultte et le m^t oG en un pt on individualise une cl^{te} de torseurs tous équivalents, et il se trouve que ds la cinémat. et la statique ou la dynam. du corps solide, torseurs eq^s jouent le même rôle. Les él^ts $\overrightarrow{oR}$ et $\overrightarrow{oG}$ s'appellent él^ts de réduction du torseur au pt o.

Cas Particuliers. 1°) vecteur unique $\overrightarrow{v_1}$ $\qquad \overrightarrow{OV} = v_1$ et est $\perp$ à $\overrightarrow{OG}$.

Invt tts les fois qu'un torseur donne une résultte $\perp$ au m^t résultant en un point, on pourra trouver un vect. unique $=$ à la résultte et donn^t le moment $\overrightarrow{oG}$. Équiv^{ce} avec un vecteur unique que l'on sait construire. en tt pt o' de l'espace $\overrightarrow{o'G'}$ sera $\perp$ à $\vec{V}$.

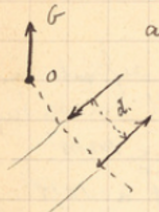
2°) couple. $\vec{V} = 0$ et un certain moment $\overrightarrow{oG}$; en un autre pt o' on a le mm mom^t $\overrightarrow{o'G'} = \overrightarrow{oG}$. ind^t du pt choisi.

Inv^t soit un torseur qque dont la résultte $= 0$. Il est ~~soit~~ formé de 2 vect. constituant un couple. Soit en effet ~~so~~ l'un des vecteurs du couple appliqué en o ~~elt~~ $\perp$ à oG, l'autre est connu en grandeur et / au pt o il doit avoir pr moment oG.

Quand $\vec{V} = 0$ le torseur équivaut à un couple.

5

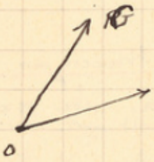
les vecteurs du couple sont indéterminés, mais l'un d'eux étant choisi, l'autre est dét. en grandeur direction et sens. (~~vect. libre~~): les vecteurs sont dans un plan quelque à au m^t résultt, leur dte d'action est arbitraire pourvu qu'entre la distance de ces dtes d'action et l'intensité I de ces vecteurs on ait $I.d = \overline{OG}$ et le sens des vecteurs doit être tel que le sens de rotat. du couple soit > 0 autour de OG. (voir de la figure).



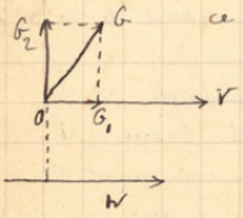
3°) $\vec{V} = o$ $\vec{OG} = o$ torseur eqt à 0.

Cas Général. soit un torseur réduit en O, $\vec{OV}$ et $\vec{OG}$ les éléments de réduction, on peut le remplacer ... par un vecteur et un couple. le vecteur $\vec{V}$ en O et le couple dont axe a pour m^t_o le vect. $\vec{OG}$.

Corollaire la formule (1) donnant le $M^t_{O'}$ connt le M^t_O devient intuitive. Pr calculer le m^t en O' je ~~remplace le système~~ prends d'abord le moment du couple $\vec{O'G'} = \vec{OG}$, + le $m^t_{O'}$ de la résultante $\vec{OV}$.



Parmi les réductions possibles d'un torseur à un vecteur et un couple, il en est de particult intéressantes: Projetons $\vec{OG}$ en $\vec{OG_1}$ sur $\vec{OV}$ je peux décomp. $\vec{OG}$ en deux vecteurs $\vec{OG_1}$, $\vec{OG_2}$, ce dernier étt $\perp \vec{OV}$. Je peux trouver un vecteur unique $\vec{W}$, égal à $\vec{V}$ et dont le m^t_o est $\vec{OG_2}$ le système est eqt à ce vecteur $\vec{W}$ et à un couple de m^t $\vec{OG_1}$ (// à W).



On peut de remplacer le torseur par un vecteur unique convenablt placé égal à la résultte, et un couple dt le m^t a la direction de la résultte. Cela n'est possible que d'une manière.

Le support ~~La direction~~ de $\vec{W}$ s'appelle l'axe central du torseur. Il est caractérisé par la propté géométrique suivante: prenons le m^t du système en un pt A de l'axe central, le m^t_A est $\vec{AG_1'}$, en un pt non sur l'axe central le m^t résultt n'est pas // à la résultte. donc l'axe central est le lieu des pts tels que le m^t résultant par rapt à ces pts ait mm direction que la résultte génle du torseur.

Il n'y a pas d'axe central dans le cas d'un couple.

Analytt soit 3 axes rect. et un torseur de résultte génle $\vec{V}$ (XYZ) et de m^t résultant à l'origine $\vec{OG}$ (LMN), l'axe central est tel que

$$\frac{L-(bZ-cY)}{X} = \frac{M-(cX-aZ)}{Y} = \frac{N-(aY-bX)}{Z}. \quad (2)$$

car le $m^t_{O'}$ de coord (abc) vaut

$$\begin{cases} L' = L-(bZ-cY) \\ M' = M-(cX-aZ) \\ N' = N-(aY-bX) \end{cases}$$

les coord. courantes sont abc dans (2).

Dans le cas d'un vecteur unique l'axe central est la dte qui porte ce vecteur, $\vec{OG_1}$ disparaît.

Coro. 2. Projetons $\vec{OG}$ sur la résultte, on a un vecteur $\vec{OG'}$ de longueur cte cad indt de la position de O, évident car c'est le m^t du couple obtenu en