
Mécanique

Numéro d'inventaire : 2015.8.5612

Type de document : travail d'élève

Période de création : 1er quart 20e siècle

Date de création : 1901

Matériau(x) et technique(s) : papier ligné, papier vergé, papier cartonné

Description : Cahier agrafé, couverture en papier cartonné orange, impression en noir, 1ère de couverture avec en haut à gauche la même signature manuscrite plusieurs fois, à droite le titre à l'encre noire, au centre une grande illustration représentant Du Guesclin avec son nom imprimé dessous. Réglure de petits carreaux, encre bleue, noire, rose.

Mesures : hauteur : 22 cm ; largeur : 17,4 cm

Notes : Cahier de cours de mécanique rationnelle: vecteurs et systèmes de vecteurs, compléments de cinématique, force vive.

Mots-clés : Mécanique (comprenant la dynamique des fluides)

Méca Rationnelle

(1)

Introduction

Ch. 1

~ Vecteurs et systèmes de vecteurs. ~

13.10

Définition : si le vecteur a une origine bien déterminée : vecteur libre.

si au contraire le pt d'application est arbitraire sur le support du vecteur : on dit que c'est un vecteur glissant. Enfin si le point d'application est tout à fait arbitraire, la grandeur la direction et le sens de ce vecteur étant bien déterminées, on dit que l'on a affaire à un vecteur libre : corps animé d'un mouvement de translation tous les points ayant au même instant même vitesse.

Somme géométrique de vecteurs : c'est un vecteur libre.

Produit d'un vecteur par un nombre. Les deux vecteurs $\vec{V}$ et $m\vec{V}$ sont portés par des droites parall. le rapport de leurs longueurs étant $|m|$ et le sens étant le même si $m > 0$, sens contraire si $m < 0$. $m = -1$: opposé.

Vecteurs opposés.

Produit de vecteurs : les vecteurs sont considérés comme libres. deux façons.

Scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ le résultat du produit est un nombre
Vecteuriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ le résultat est un vecteur

Scalaire : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2 \cos \theta$ θ est l'angle des vecteurs.

en montrant les vecteurs sur deux axes on a aussi le produit des mouvs. algb. multiplié par le cosinus de l'angle de direct. > 0 des axes.
 $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 =$ produit algb. de l'amp. des vecteurs par le proj. de l'un sur l'autre.
En conséquence : si $\vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}_1''$ le produit scalaire est distributif.
 $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1' \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1'' \cdot \vec{V}_2$

si les axes sont rect. les deux vect. ont pour comp. resp. $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$
la valeur du produit scalaire : $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Le produit scal. est ind^é de l'ordre des facteurs.

Vecteuriel : on ne peut le définir que si l'on a choisi un sens > 0 de rotation. sa nature est $\neq$ de ceux de nos facteurs. D'où la distinction entre vecteur polaire et axial.

Un vecteur polaire est un vecteur dont la disp. ne dépend pas du sens de rotation ; le vecteur axial en dépend : tels sont le vecteuriel, le

en fait la somme: $M_{O'}^t = M_O^t + M_{O'}^t \cdot \vec{O\vec{V}}$ $\vec{O\vec{V}}$ étant la résultante du torseur en O.

$$\vec{O'\vec{G'}} = \vec{O\vec{G}} + M_{O'}^t \cdot \vec{O\vec{V}}. \quad (1)$$

car $M_{O'}^t \vec{V}_1 + M_{O'}^t \vec{V}_2 + \dots + M_{O'}^t \vec{V}_n = M_{O'}^t \vec{O\vec{V}}$ d'après le théorème de l'origine.

Étant donné un torseur gyre S passant en O le m^t en O, et la résultante $\vec{R}$ en O, on a en O' le $M_{O'}^t$ donné par (1).
Corrélaire: si deux torseurs ont même résultante et m^t en un pt O, ils ont mm m^t en tout pt de l'espace d'après la relation (1). Les deux torseurs sont alors dits équivalents.

Propriété fondamentale: Définition des opérations élémentaires.

- 1°) faire glisser un vecteur sur sa ligne d'action
- 2°) remplacer plusieurs vecteurs ayant mm pt d'application, par leur résultante ou inversement & ces opérat. élém. ne modifient ni la résultante ni le m^t .
de sorte que deux torseurs tels que l'un passe de l'un à l'autre par des opérat. élém. et équivalents. R^t et deux torseurs S et S' on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires.

Soit deux torseurs T, T' formés par les vect. $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n, \vec{V}_1', \dots, \vec{V}_p'$. Je fais d'abord T et par des opérat. élém. je passe à T' j'ajoute à T les vecteurs de T' et les vecteurs opposés $-\vec{V}_1', \dots, -\vec{V}_p'$. Je considère maintenant l'ensemble $T + (-T')$ c'est un torseur de résultante = 0, le m^t est nul en tt pt. on peut remplacer tous les vecteurs par leur $\vec{R}$, par des opérations élémentaires, $\vec{R}$ et $-\vec{R}$ car leur résultante = 0; de + le m^t à l'origine de $\vec{R}$ de l'autre vecteur $-\vec{R}$ est nul, de ce deux vect. nt fond par le mm dte; de on peut leur donner le mm pt d'applcat. et les supprimer car leur résultante = 0. Il ne reste donc rien T' .

De m. donnant la résultante et le m^t en un pt on individualise une S^t de torseurs très équivalents, et il se trouve que de la cinématique et la statique ou la dynam. du corps solide, torseurs S^t jouent le même rôle. Soit $\vec{O\vec{V}}$ et $\vec{O\vec{G}}$ s'appellent elt de réduction du torseur au pt O.

Cas Particuliers. 1°) vecteur unique $\vec{V}_1$ $\vec{O\vec{V}} = \vec{V}_1$ et est $\perp$ à $\vec{O\vec{G}}$.

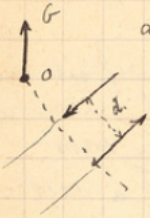
Sur tt la ligne du torseur donne une résultante $\perp$ au m^t résultant en un point, on pourra trouver une rés. unique = à la résultante et donne le moment $\vec{O\vec{G}}$. Équivalent avec un vecteur unique que l'on sait construire. en tt pt O de l'espace $\vec{O'\vec{G'}}$ sera $\perp$ à $\vec{R}$.

2°) couple. $\vec{R} = 0$ et un certain moment $\vec{O\vec{G}}$; en un autre pt O' on a le mm moment $\vec{O'\vec{G'}} = \vec{O\vec{G}}$. ind^t du pt choisi.

Sur tt soit un torseur gyre dont la résultante = 0. Il est entièrement formé de 2 rés. constituant un couple. Soit en effet $\vec{V}$ l'un des vecteurs du couple appliqué en O et à $\vec{O\vec{G}}$, l'autre est connu en grandeur et au pt O il est appliqué par moment $\vec{O\vec{G}}$.

Quand $\vec{R} = 0$ le torseur équivaut à un couple.

Les vecteurs du couple sont indéterminés, mais l'un d'eux étant choisi, l'autre est déf. en grandeur direction et sens. (voir schéma): les vecteurs sont donc sur une même ligne que l'axe m^t résulte, leur direction d'action est arbitraire, l'entre la distance de ce 5^e d'action est l'abscisse I de ce vecteur on a $I \cdot d = \vec{OB}$ et le sens des vecteurs doit être tel que le sens de rotation du couple soit > 0 autour de OB . (voir schéma figure).



2) $\vec{r} = 0$ $\vec{OB} = 0$ l'axe est à 0.

Cas Général. soit un torseur réduit en 0, $\vec{OV}$ et $\vec{OB}$ les éléments de réduction, on peut le remplacer crist par un vecteur et un couple.

le vecteur $\vec{V}$ en 0 et le couple doit avoir pour m^t la red. $\vec{OB}$.

Corollaire le moment (1) donnant le M^t , comme le M^t demeure invariable. Réciproque le m^t en O' se remplace par le moment du couple $\vec{O'B'} = \vec{OB} + \vec{r}$ + le m^t de la résultante $\vec{OV}$.

Parmi les réductions possibles d'un torseur à un vecteur et un couple, il en est de particulièrement intéressantes: Projeter $\vec{OB}$ en $\vec{OB_1}$ sur $\vec{OV}$ je puis décom. $\vec{OB}$ en deux vecteurs $\vec{OB_1}$, $\vec{OB_2}$ ce dernier est $\perp \vec{OV}$. Je puis trouver un vecteur unique $\vec{W}$, égal à $\vec{V}$ et dont le m^t est $\vec{OB_2}$ le système est égal à ce vecteur $\vec{W}$ et à un couple de m^t $\vec{OB_1}$ ($\parallel$ à $\vec{W}$).

On peut se remplacer le torseur par un vecteur unique convenablement placé égal à la résultante, et un couple de m^t à la direction de la résultante. Cela n'est possible que d'une manière.

Le support de $\vec{W}$ s'appelle l'axe central du torseur. Il est caractérisé par la prop. géométrique suivante: prenons le m^t du système en un pt A de l'axe central, le m^t est $\vec{AB_1}$, en un pt non sur l'axe central le m^t résulte n'est pas $\parallel$ à la résultante. donc l'axe central est la ligne des pts tels que le m^t résulte par rapport à ces pts ait même direction que la résultante du torseur.

Il n'y a pas d'axe central dans le cas d'un couple. Analytiquement si on a un torseur de résultante $\vec{r} = (x, y, z)$ et de m^t résultant à l'origine $\vec{OB} = (L, M, N)$, l'axe central est tel que

$$\frac{L - (bz - cy)}{x} = \frac{M - (cx - az)}{y} = \frac{N - (ay - bx)}{z} \quad (2)$$

car le m^t de coord. (abc) vaut $\begin{cases} L' = L - (bz - cy) \\ M' = M - (cx - az) \\ N' = N - (ay - bx) \end{cases}$

le coord. constants sont atteints dans (2).

Dans le cas d'un vecteur unique l'axe central est la direction qui porte ce vecteur, $\vec{OB_1}$ disparaît.

Cas 2. Projeter $\vec{OB}$ sur la résultante, on a un vecteur $\vec{OB'}$ de longueur et de direction indéterminée de la position de 0, en fait car c'est le m^t du couple obtenu en