Mathématiques : Algèbre

Numéro d'inventaire : 2015.8.4744
Auteur(s) : Michelle Flavin
Type de document : travail d'élève
Période de création : 3e quart 20e siècle
Date de création : 1958
Matériau(x) et technique(s) : papier ligné
Description : 1feuille double et 1 feuille simple insérée à l'intérieur, réglure type "papier millimétré" avec marge, encre bleue, rouge.
Mesures : hauteur : 21,8 cm ; largeur : 17 cm
Notes : Evaluation, 1er trimestre, notée :polynômes (calculs, mettre sous forme d'un produit de facteurs du 1er degré).
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Filière : Lycée et collège classique et moderne
Niveau : 2nde
Autres descriptions : Nombre de pages : Non paginé.
Commentaire pagination : 6 p. manuscrites sur 6 p.
Langue : français.

Flavin Michelle
2EN

15

Vendredi 19 Décembre 1958

Mathématiques.

Algèbre.

On donne les 2 polynômes :

$A : x^2+y^2+z^2+2xyz-1$

$B : (x+y+z-1)^2 - 2(1-x)(1-y)(1-z)$

1) Vérifier que si l'on a $A=0$ on a aussi $B=0$

2) La relation $A=0$ étant vérifiée on pose $x=\frac{a}{2}$ et $y=\frac{b}{2}$ $z=0$. Quelles relations simples vérifient a et b.

3) On pose $y=x$ et $z=x$. Ecrire les polynômes A et B dans ce cas particulier. Vérifier qu'ils s'annulent pour $x=\frac{1}{2}$ et les mettre sous forme d'un produit de facteurs du 1° degré.

1/ $A = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0$

$B = (x+y+z-1)^2 - 2(1-x)(1-y)(1-z)$

Calculons le 1e Terme de la différence du polynôme B. C'est l'application du produit remarquable : $(a+b+c+d)^2 = \sum a^2 + \sum ab$

$(x+y+z-1)^2 = x^2+y^2+z^2+1+2xy+2xz-2x+2xyz-2y-2z$

Effectuons le 2e terme :

$$2(1-x)(1-y)(1-z) = (2-2x)(1-y)(1-z)$$
$$= (2-2y-2x+2xy)(1-z)$$
$$= 2-2y-2x+2xy-2z+2yz+2xz-2xyz$$

Effectuons maintenant la différence en changeant les signes du 2e polynôme.

$B = x^2+y^2+z^2+1+\cancel{2xy}+2xz\cancel{-2x}+\cancel{2yz}\cancel{-2y}\cancel{-2z}-2$
$\cancel{+2y}\cancel{+2x}\cancel{-2xy}\cancel{+2z}\cancel{-2yz}\cancel{-2xz}+2xyz$

d'où en simplifiant :

$B = x^2+y^2+z^2-1+2xyz \quad = A$

et si $A = 0 \quad B = 0$

2) Remplaçons dans le polynôme x, y et z par leur valeur :

$A = B = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 0 + 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)(0) - 1$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un des facteurs du produit soit nul. Donc : le produit $2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)(0) = 0$

Nous avons alors :

$$A = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{4}{4}$$

d'où $a^2 + b^2 = 4$

3) Donnons à z et à y la valeur x d'abord dans le polynôme A, puis dans le polynôme B.

$A : x^2 + x^2 + x^2 + 2x^3 - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$

$B : (x+x+x-1)^2 - 2(1-x)(1-x)(1-x)$

$B = (3x-1)^2 - 2(1-x)^3$

Dans le 1e terme nous avons le carré d'une différence. Donc :

$B = 9x^2 - 6x + 1 - 2(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$

car le 2e terme était le cube d'une différence.