Agrégation de mathématiques. Sujets de 1939 à 1948.

Numéro d'inventaire : 1989.00493 (1-29)
Type de document : imprimé divers
Date de création : 1948
Description : 6 feuilles simples, 15 feuilles doubles et 8 carnets.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Diplômes professionnels
Filière : Université
Niveau : Supérieur
Autres descriptions : Langue : Français
Nombre de pages : n.p.

J. 547994.

A. M. — 23 C.

SESSION SPÉCIALE DE DÉCEMBRE 1945.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Il s'agit d'étudier les courbes (Γ) sur lesquelles les arcs de longueur donnée sont sous-tendus par des cordes égales. Les arcs, plans ou gauches, qui sont donnés, sont supposés réels, pourvus en chaque point d'une tangente unique, et sans rebroussement. Les données seront supposées telles que les solutions utilisées des systèmes différentiels qui se présentent peuvent toujours être prolongées aussi loin qu'il est nécessaire.

Après avoir traité les deux premières questions de la première partie, on pourra aborder les deux premières questions de la deuxième partie. La cinquième question de la deuxième partie ne demande, pour être traitée, que la connaissance de la définition des courbes (Γ).

I. — COURBES PLANES.

1° Sur une courbe plane (C) on a choisi un sens de parcours et une origine des abscisses curvilignes, on repère le point courant P au moyen de son abscisse curviligne s, on désigne par φ l'angle que fait en P la demi-tangente orientée avec une direction fixe (D) [pour (D) on pourra prendre l'axe Ox si l'on désire rapporter la courbe à deux axes de coordonnées rectangulaires xoy].

L'origine P d'un segment de droite PQ de *longueur donnée* $2L$ décrit la courbe (C), on désigne par ψ l'angle que fait la direction PQ avec (D).

Montrer que, si les arcs parcourus par P et par Q sont constamment égaux, il y a entre φ, ψ et $\frac{d\psi}{ds}$ une relation qui se décompose en deux et que l'une de ces dernières correspond à une

T. S. V. P.

A. M. — 23 A. J. 47425-44.

SESSION DE 1944.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

I

Sur une droite X′X on considère trois points distincts A, B, C. Soit M un point extérieur à X′X. On désigne par α, β, γ les centres des cercles (α), (β), (γ) respectivement circonscrits aux triangles MBC, MCA, MAB, par α', β', γ' les sommets du triangle dont les côtés opposés à α', β', γ' ont respectivement pour milieux les points α, β, γ.

1° Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ passe par M ; que le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est sur X′X et que les droites Aα', Bβ', Cγ' sont perpendiculaires à X′X.

2° Montrer que : pour que trois points P, Q, R pris respectivement sur les cercles (α), (β), (γ) soient alignés avec M il est nécessaire et suffisant que deux couples de côtés opposés de l'hexagone ARBPCQ soient formés de droites parallèles.

3° (Δ) désignant la droite passant par M et par le point de contact P avec (α) d'une tangente parallèle à MA, prouver que (Δ) contient le point de contact Q avec (β) d'une tangente parallèle à MB et le point de contact R avec (γ) d'une tangente parallèle à MC.

Établir la relation angulaire :

$$(X'X, MA) + (X'X, MB) + (X'X, MC) = 2(X'X, \Delta) \text{ à } k\pi \text{ près.}$$

Démontrer que les trois tangentes précédentes coupent X′X en un même point O situé sur le cercle circonscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$.

II

On donne un point O, un axe X′OX et sur cet axe les points A, B, C déterminés par leurs abscisses positives $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$. (On peut supposer $a < b < c$.)

T. S. V. P.

8,5 André Chauvin

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Mathématiques élémentaires

I

On considère une conique (C) dont on désigne :
les foyers par F et F' ; le centre par O ; OF = OF' = c ; l'excentricité par $e = \frac{c}{a} \neq 1$; les directrices associées à F et F' par (D) et (D').

1,3 1°) Par un point M variable de (C) on mène la droite parallèle à FF' qui coupe (D) en H et (D') en H' et l'on prend sur cette droite HH' un point quelconque K. On appelle P le point commun à FM et à la parallèle KP à FH et l'on appelle P' le point commun à F'M et à la parallèle KP' à F'H'. max 4

Trouver les lieux des points P et P', l'enveloppe de la médiatrice de PP' et l'enveloppe de PP' quand K décrit une parallèle (X) à (D). min 3

4,7 2°) Déduire de ce qui précède que l'enveloppe du cercle (G) centré sur (C) et dont le rayon est égal au produit par e de la distance de son centre à (X) se compose de deux cercles (A) et (A').

1,5 Calculer les rayons r et r' de ces deux cercles et discuter leur position relative suivant les valeurs de a, d ; d désignant la distance de O à (X).

Réciproquement, si l'on considère une des deux familles de cercles tangents à deux cercles donnés, existe-t-il une droite (X) telle que les rayons de ces cercles variables soient proportionnels aux distances de leurs centres à la droite (X) ?

0,5 3°) Montrer qu'il existe un point fixe S du plan qui a même puissance p par rapport à tous les cercles (G). Calculer la distance OS = x et la puissance p en fonction de a, e, d. Examiner les cas particuliers d = 0 et $d = \frac{a}{e}$.

II

On suppose, dans cette partie seulement, que (C) est une hyperbole équilatère.

1°) On pose : (I) $rr' = m^2$
Les longueurs m, d, a sont supposées mesurées avec la même unité de longueur et l'on se propose de réaliser l'égalité (I) de façon que les mesures obtenues m', d', a' soient des nombres entiers tels que m' soit le plus grand commun diviseur de d' et de a'.

Montrer que cela est possible d'une infinité de façons.

On posera d' = xm' et a' = ym' et l'on utilisera le changement de variables :

$$x = 3u + 2v \quad ; \quad y = 4u + 3v$$

pour calculer les valeurs de x et de y inférieures à 10000.

3,5 2°) On classe les nombres x et y par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots\ldots$$

$$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots\ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots\ldots$$

le couple x_n, y_n étant formé de nombres correspondant à une solution du problème.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n ; exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et x_{n-1}. Montrer que les fractions $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ sont irréductibles ;