Agrégation des Sciences Mathématiques. Concours de 1919 : problème de calcul différentiel et intégral

Numéro d'inventaire : 2016.90.38
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1919
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1919.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DE 1919.

PROBLÈME
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

Appelons R, θ, φ les coordonnées sphériques d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z de sorte que

$$x = \mathrm{R}\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \mathrm{R}\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \mathrm{R}\cos\theta.$$

On considère la surface S dont l'équation est

$$\mathrm{R} = ae^u$$

a étant une constante, e la base des logarithmes népériens, et u la fonction

$$u = \lambda\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta}\, d\theta$$

où λ est une constante donnée.

1° On demande de former les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de S.

2° Montrer que dans les deux équations, on peut séparer les variables.

3° Prouver que toutes les lignes de courbure de S (de l'une quelconque des deux familles) sont semblables. De même pour les lignes asymptotiques.

4° Considérer le cas où $\lambda = 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

1° On considère les fonctions réelles $\varphi(x)$ qui sont continues sur l'intervalle J : $0 \leq x \leq 1$, et telles que

$$0 < \varphi(x) < 1.$$

T. S. V. P.

2° Parmi ces fonctions envisageons d'abord celles dont l'oscillation reste inférieure à $\frac{1}{n}$ dans tout intervalle partiel de longueur $\frac{1}{p}$.

Montrer qu'il existe un nombre *fini* $2s$ de fonctions

$$g_1(x), h_1(x), g_2(x), h_2(x), \ldots\ldots\ldots, g_s(x), h_s(x)$$

qui sont continues sur J et telles que

$$0 \leq h_1(x) < g_1(x) \leq 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \leq h_s(x) < g_s(x) \leq 1$$
$$g_1(x) - h_1(x) \leq \frac{3}{n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad g_s(x) - h_s(x) \leq \frac{3}{n}$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ envisagées on peut assigner un des couples $g_i(x)$, $h_i(x)$ satisfaisant sur J aux conditions

$$h_i(x) < \varphi(x) < g_i(x).$$

3° On demande non seulement de prouver l'existence des fonctions g, h en nombre fini, mais, parmi tous les choix possibles, d'en définir au moins un explicitement connaissant seulement n et p.

4° Si l'on ne peut fixer en fonction de n et de p la plus petite valeur possible du nombre s des couples g, h, on demande de déterminer au moins une fonction algébrique simple de p et de n qui soit une des valeurs possibles de s.

5° Parmi les fonctions $\varphi(x)$ décrites au paragraphe 1°, considérons seulement maintenant celles qui admettent partout sur J une dérivée φ'_x dont la valeur absolue reste inférieure ou au plus égale à un nombre déterminé $k > 0$. Montrer que si λ, ω sont deux nombres arbitraires l'un supérieur à k, l'autre à zéro, il existe un nombre *fini* $2t$ de fonctions $q_1(x)$, $r_1(x)$, ..., $q_t(x)$, $r_t(x)$ admettant partout sur J une dérivée continue dont la valeur absolue reste inférieure à λ et telles que

$$0 \leq r_1(x) < q_1(x) \leq 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad 0 \leq r_t(x) < q_t(x) \leq 1$$
$$q_1(x) - r_1(x) < \omega, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad q_t(x) - r_t(x) < \omega$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ envisagées maintenant on peut assigner un des couples $q_i(x)$, $r_i(x)$ satisfaisant sur J aux conditions

$$r_i(x) < \varphi(x) < q_i(x).$$