Exercices. Tome II : série II

Numéro d'inventaire : 2016.90.26
Type de document : travail d'élève
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1916 (entre) / 1917 (et)
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Cahier cousu avec une couverture cartonnée orange portant une étiquette de titre. Réglure double ligne 8 mm avec une marge rouge. MS encre noire.
Mesures : hauteur : 22 cm ; largeur : 17,2 cm
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 100 p.
ill.
Lieux : Paris

2e cahier 1916-1917. [Voir à la fin des questions concernant le cours d'algèbre (début)]

$$\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Conc. Janv 17.

Lorsque vous avez à intégrer l'exp. telle que $\frac{P}{Q\sqrt{1-x^2}}$ où P et Q sont des poly, Q n'ayant que des rac. simples vous pouvez simpl. l'intégr. en déc. $\frac{P}{Q}$ en éléments simples. Il y a des cas où ça serait plus compliqué de faire comme ça. Manière générale c'est la meilleure méthode. Ap. le cas

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{4-x^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x}, \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}$$

$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{}}$ + une intég. analogue $\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{}}$

Je vais me simpl. immédiat. en écrivant $1-\frac{x}{2}$ au lieu de $2-x$ et en mett. $\frac{1}{8}$ en fact.

$$I = \frac{1}{8}\int^1 \frac{dx}{(1-\frac{x}{2})\sqrt{}} + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dx}{(1+\frac{x}{2})\sqrt{}}$$

Ce sont des intégrales classiques qu'on rencontre fréq.

Si on fait $x = \cos\theta$, (θ allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$) elles se transforment ainsi la première

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin\theta\, d\theta}{(1-\frac{\cos\theta}{2})\sin\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1-\frac{\cos\theta}{2}}$$

C'est du type général $\int \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$ où $|e|<1$.

Sa valeur peut s'exp. de plus. façons, par ex. par la f.

$$\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

Ici $e = -\frac{1}{2}$. Donc nous allons avoir

$$\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}}\, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

Nous avons à div. par 8 et à ajouter l'intégrale analogue qui ne diff. de la 1e que par le signe de e.

Ce sera donc $\frac{2}{8\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$. Eh bien, il faut faire la somme de ces 2 intégrales et prendre la val