Agrégation des Sciences Mathématiques. Session spéciale d'octobre 1919 : problème de calcul différentiel et intégral

Numéro d'inventaire : 2016.90.36
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1919
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille simple. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1919.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 2 p.
ill.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION SPÉCIALE D'OCTOBRE 1919.

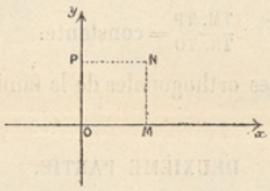
PROBLÈME

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

1° Soit $f(\zeta)$ une fonction de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$. Soit C le contour du carré OMNP dont les sommets ont respectivement pour affixes les quatre nombres complexes

$$0,\ 1,\ 1+i,\ i.$$



Montrer que si $f(\zeta)$ est sur C une fonction de ζ bien déterminée et bornée qui est continue sur C sauf peut-être aux sommets, l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}$$

est une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ qui est holomorphe en tout point n'appartenant pas au contour C.

2° Calculer effectivement l'intégrale (sous forme de combinaison algébrique de fonctions élémentaires de z) dans les trois cas suivants :

I. $f(\zeta) = \zeta$ sur tout le contour C

II. $f(\zeta) = 1$ quand $\eta = 0$ ou $\eta = 1$
$= 0$ sur tout le reste du contour C

III. $f(\zeta) = \xi$, partie réelle de ζ, sur tout le contour C.

(Le sens positif de parcours sur C est celui dans lequel on rencontre successivement les points O, M, N, P.)

T. S. V. P.

3° Montrer que dans ces trois cas l'intégrale est une fonction continue dans tout le plan sauf *peut-être* sur la ligne polygonale ouverte OMNP d'origine O, extrémité P.

4° Désignons par $2i\pi F(z)$ la valeur de l'intégrale calculée quand $f(\zeta)=\xi$ (cas III), en un point z situé en dehors de la ligne ouverte OMNP. On demande de calculer la discontinuité éprouvée par $F(z)$ en traversant cette ligne polygonale (de l'intérieur du carré C vers l'extérieur). Le calcul sera effectué en se servant de l'expression analytique de $F(z)$ obtenue au paragraphe 2°, III.

5° Développer $F(z)$ en série suivant les puissances entières de $\frac{1}{z}$. Déterminer le domaine de convergence de la série obtenue.

6° Calculer la dérivée F'_z de $F(z)$. Séparer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Remarque. — On aura soin pour ces différentes questions de préciser, quand il y a lieu, quelles sont celles des branches des fonctions élémentaires multiformes employées pour calculer $F(z)$ et F'_z qu'il faut considérer pour que les égalités formelles obtenues soient exactes.

7° On considère dans le plan xoy les courbes S telles que si T est un point variable sur l'une de ces courbes Γ, l'on ait sur S

$$\frac{TM.\ TP}{TN.\ TO}=\text{constante}.$$

Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes S.

DEUXIÈME PARTIE.

1° Montrer que l'intégrale $\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$, où $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$, croît indéfiniment lorsque λ tend vers zéro.

2° On considère l'intégrale

$$J(\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+\varepsilon\cos^2 x}}$$

où ε est un nombre >0. Montrer que si ε tend vers zéro la quantité $J(\varepsilon)$ croît indéfiniment.

3° En établir l'expression approchée

$$J(\varepsilon)=\log\frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}+\omega$$

où ω est infiniment petit en même temps que ε.