# Certificats d'Etudes Supérieures. Université de Lille, Faculté des sciences. Session de mai-juin 1967.

**Numéro d'inventaire** : 1999.01421
**Type de document** : imprimé divers
**Éditeur** : Université de Lille (Lille)
**Date de création** : 1966
**Description** : Feuilles simples de couleur agrafées par épreuves.
**Mesures** : hauteur : 310 mm ; largeur : 210 mm
**Notes** : Intitulés des différentes épreuves du Certificat d'Etudes Supérieures.
**Mots-clés** : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
**Filière** : Université
**Niveau** : Supérieur
**Nom de la commune** : Lille
**Nom du département** : Nord
**Autres descriptions** : Langue : Français
Nombre de pages : 35
**Lieux** : Nord, Lille

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

SESSION DE MAI/JUIN 1967

CERTIFICAT D'ETUDES SUPERIEURES

de MATHEMATIQUES II

Epreuve de Calcul Différentiel

PROBLEME.-

---) Il sera tenu grand compte de l'énoncé précis des théorèmes utilisés)

On considère les deux espaces normes suivants :

$E = \mathbb{R}^3_m$ (coordonnées u, v, w) ; $F = \mathbb{R}^3_M$ (coordonnées x, y, z)

avec

$$\|m\|^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad ; \quad \|M\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

On désigne par U l'ouvert complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^3_M$.

Dans $\mathbb{R}^3_M$ on considère la forme différentielle

$$\psi = x\, dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

et dans U on considère la fonction

$$g(M) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3}$$

On pose $\omega = g\,\psi$.

a) Soit S la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ orientée comme bord de la boule de rayon $\rho$. Enoncer la formule de Stokes, et en déduire l'intégrale :

$$\iint_S \psi \qquad \text{en déduire} \qquad \iint_S \omega$$

Pourrait-on calculer directement la seconde intégrale à l'aide de la formule de Stokes ?

b) Montrer que $d\omega = 0$

c) Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^3_m$ et soit $D \subset \Omega$ un compact dont l'intérieur, non vide, est muni de l'orientation canonique de $\mathbb{R}^3_m$ et dont le bord $\Gamma$ est une surface assez régulière pour que la formule de Stokes soit applicable.

Soit f une application de classe $C^2$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^3_M$ telle que $f(\Gamma) \subset U$ ; on pose :

$$I(f, \Gamma) = \iint_\Gamma f^* \omega$$

Montrer, sans aucun calcul, que si $f(D) \subset U$ (c'est-à-dire si la fonction vectorielle f n'a pas de zéros dans D) on a $I(f, \Gamma) = 0$

d) On suppose que la restriction $f_D$ de f à D est un difféomorphisme de classe $C^2$ sur la boule $\|M\| \leqslant \rho$ (c'est-o-dire que $f_D$ est biunivoque, $f_D$ et $f_D^{-1}$ étant de classe $C^2$). Montrer que, dans ce cas

.../...

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

SESSION DE SEPTEMBRE / OCTOBRE 1966

CERTIFICAT D'ETUDES SUPERIEURES

de MECANIQUE GENERALE

Durée de l'épreuve : 4 heures

---) Les deux questions sont indépendantes. Elles devront être traitées sur des feuilles séparées, de couleurs différentes : blanche pour la première, saumon pour la seconde.

I.- Un losange A B C D, formé de quatre barres égales et homogènes réunies par des articulations, se meut dans un plan horizontal $\pi$ , le sommet A étant maintenu fixe. On suppose tous les frottements négligeables. A l'instant initial la figure A B C D est un carré et, toujours à l'instant initial, les vitesses angulaires des barres A B et A D sont égales respectivement à $\omega_1$, et $\omega_2$. On désigne par $\theta_1$ et $\theta_2$ les angles que font à un instant t quelconque les barres A B et A D avec un axe fixe A x du plan $\pi$. La longueur d'une barre est $\ell$ et sa masse est m.

1) Calculer l'énergie cinétique du système formé par les quatre barres.

2) Ecrire les équations différentielles du mouvement de ce système et obtenir deux intégrales premières. Trouver l'équation différentielle de la forme $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = f(\varphi)$ satisfaite par l'angle $\widehat{BAD} = \varphi$. Quelle est la condition que doivent vérifier $\omega_1$ et $\omega_2$ pour que durant le mouvement $\varphi$ possède un maximum ?

II.- Un solide S, homogène et pesant, est de révolution par rapport à un axe O z, et le point O de cet axe est maintenu fixe, cette liaison étant réalisée sans frottement. Il n'y a pas d'autres forces données que le poids. On désigne par $O\,x_1\,y_1\,z_1$ les axes fixes, $O\,z_1$ étant la verticale ascendante, et par O x y z les axes liés à S, O z étant orienté dans le sens qui va de O vers le centre d'inertie G de S. Soient M le point de S de coordonnées 0, 0, 1 par rapport aux axes O x y z, P la projection de M sur le plan horizontal $O\,x_1\,y_1$, et enfin $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point P par rapport aux axes $O\,x_1\,y_1$.

.../...

La masse du solide S est m, ses moments principaux d'inertie en O sont A, A, C, et on a $OG = \ell$.

1) Calculer les composantes $\sigma_{x_1}$ et $\sigma_{y_1}$ par rapport aux axes $O\,x_1$ et $O\,y_1$ du moment cinétique $\sigma_o$ de S par rapport au point O. Montrer que $\sigma_{x_1}$ et $\sigma_{y_1}$ s'expriment sous la forme suivante :

$$\sigma_{x_1} = F\,y_1' + G\,x_1 + H\,y_1 ,$$
$$\sigma_{y_1} = P\,x_1' + Q\,x_1 + R\,y_1 ,$$

F, G, H et P, Q, R étant des fonctions de l'angle d'Euler $\theta$ et de $\theta'$ , fonctions que l'on déterminera. On utilisera le résultat donné par la troisième équation d'Euler.

2) Le solide S se meut de telle façon que l'axe O z reste au voisinage de l'axe $O\,z_1$. Ecrire les équations approchées du mouvement en prenant pour inconnues $x_1$ et $y_1$ (On prendra $\theta \simeq 0$ dans $\sigma_{x_1}$ et $\sigma_{y_1}$ ). Montrer que ces équations forment un système différentiel linéaire, à coefficients constants. Intégrer ce système. (On posera $w = x_1 + i\,y_1$).

3) Le solide S effectue toujours le mouvement du paragraphe précédent. A l'instant initial on donne à S une rotation autour de O z de vitesse angulaire $r_o$ et on suppose que l'on a

$$r_o^2 > \frac{4\,A\,m\,g\,\ell}{C^2} ,$$

Montrer que la trajectoire du point P est une ellipse E de centre O, qui tourne autour de O avec une vitesse angulaire $\omega = \dfrac{C\,r_o}{2\,A}$. Déterminer la période T du mouvement de P sur l'ellipse E.

- o O o -