Agrégation des Sciences Mathématiques. Session de 1922 : mathématiques spéciales

Numéro d'inventaire : 2016.90.48
Type de document : texte ou document administratif
Éditeur : Ministère de l'Instruction publique
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1922
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Feuille double. Texte imprimé à l'encre noire.
Mesures : hauteur : 31,7 cm ; largeur : 21 cm
Notes : Sujet d'agrégation de mathématiques de 1922.
Mots-clés : Examens et concours : publicité et sujets
Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Non paginé
Commentaire pagination : 4 p.

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE 1922.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

I. Un cercle (Γ), rapporté à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, a pour équations :

$$z=0, \qquad x^2+y^2-a^2=0.$$

Deux tangentes fixes Δ Δ', à ce cercle, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T.

Montrer qu'il existe dans l'espace deux points ω, ω', d'où l'on voit constamment le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées des points ω, ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ'.

Où doit se trouver P pour que les points ω, ω' soient réels, ou imaginaires, ou confondus?

Trouver, lorsque Δ et Δ' varient, l'équation de la surface (S_Γ) lieu des points ω, ω'.

Construire la méridienne de cette surface et établir que (S_Γ) est le lieu des projections de l'origine O sur les plans tangents à un certain hyperboloïde.

Existe-t-il des points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ'?

II. On considère une ellipse (E) ayant pour équations :

$$z=0, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (a>b).$$

Deux tangentes fixes Δ, Δ', à cette ellipse, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T.

Montrer qu'il existe deux points ω, ω' de l'espace, d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées $(x, y, \pm z)$ de ω, ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ'.

D'après la nature de la question, prévoir géométriquement où doit se trouver le point P pour que ω et ω' soient confondus, et en déduire une décomposition en facteurs de l'expression de z^2. Discuter la nature des points ω, ω' suivant la position de P.

T. S. V. P.

Former l'équation de la surface $(S_{\scriptscriptstyle\mathrm{I}})$ lieu de ω, ω', lorsque Δ et Δ' varient. Les sections de $(S_{\scriptscriptstyle\mathrm{I}})$ par les plans xoz et yoz comprennent chacune un cercle et un ovale de Cassini que l'on construira. On étudiera aussi la section par xoy.

Quels sont les couples Δ, Δ' auxquels correspond une infinité de points ω, ω'?

Quels sont les points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ'?

III. La droite $\omega\omega'$ rencontre en un point I le plan xoy. Montrer qu'à un point I (α, β) donné correspondent trois points P que l'on désignera par P_1, P_2, P_3. Établir que ces points sont réels en même temps que le point I et qu'ils sont situés sur l'hyberbole d'Apollonius relative à ce point.

[On pourra prendre comme inconnue auxiliaire : $a^2 . \dfrac{\alpha - x_0}{x_0}$.]

Former en fonction de (α, β) l'équation du cercle (K) circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$.

Vérifier que (K) coupe le cercle orthoptique de (E) en deux points symétriques par rapport à O, qu'il passe par le symétrique de I par rapport à O, et enfin qu'il passe par le symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Déduire de là une construction du cercle (K) et des points P_1, P_2, P_3, et que I étant réel, les points correspondants P_1, P_2, P_3 sont réels.

IV. Soient Δ, Δ' deux génératrices fixes, de même système, de l'hyperboloïde à une nappe (H) ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Une génératrice G, du second système, les rencontre en M et M'. Montrer qu'il existe deux points ω, ω' d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Soit θ le point de rencontre de Δ et de la génératrice parallèle à Δ'. Trouver la relation qui existe entre $O\omega$ et $O\theta$.

Former l'équation de la surface $(S_{\scriptscriptstyle\mathrm{II}})$ lieu des points ω, ω', lorsque Δ et Δ' varient.

Cette surface est indépendante du système de génératrices considéré.

Il n'existe pas de couple Δ, Δ' auquel correspond une infinité de points ω.

V. Deux génératrices fixes Δ_1, Δ'_1, de même système, du paraboloïde hyperbolique ayant pour équation :

$$\frac{^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

sont rencontrées en M et M' par une génératrice variable G, de l'autre système.

Il n'existe pas en général de point ω d'où l'on voit le segment MM′ sous un angle droit lorsque G varie.

Si Δ_1, Δ'_1 sont rectangulaires, il existe une infinité de points ω situés sur un cercle (Γ_1), dont le plan passe par une droite fixe D_1, lorsque le couple Δ_1, Δ'_1 varie.

Au deuxième système de génératrices correspondent, de même, des cercles (Γ_2) dont les plans passent par une droite D_2. Les droites D_1, D_2 se rencontrent en un point I. Former l'équation de la surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2), et démontrer que (Σ) est sa propre transformée dans une certaine inversion ayant I pour pôle.

Trouver tous les cercles tracés sur (Σ), et les pôles des inversions qui n'altèrent pas cette surface.

Nota. — Il sera commode de définir les tangentes à (Γ) ou (E) en fonction rationnelle d'un paramètre, et de définir un point du plan au moyen des paramètres des deux tangentes qui passent par ce point.