Algèbre. Tome III

Numéro d'inventaire : 2016.90.68
Type de document : travail d'élève
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1909 (entre) / 1910 (et)
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Cahier cousu avec couverture en papier rose portant le tampon du lycée Janson de Sailly et les titres des leçons étudiées. Réglure double ligne 8 mm sans marge. MS encre noire et crayon rouge et bleu.
Mesures : hauteur : 22,3 cm ; largeur : 17,5 cm
Notes : Cours du lycée Janson de Sailly. Date estimée d'après le tome 1 Cahier de mathématiques (2016.90.49) et le tome 5 Cahier de mathématiques (2016.90.53).
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Paginé
Commentaire pagination : 100 p.
ill.
Lieux : Paris

X

Formule générale d'addition & de multiplication des arcs –

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')(\cos\theta'' + i\sin\theta'') = \cos(\theta+\theta'+\theta'') + i\sin(\theta+\theta'+\theta'')$

Réel. le prod. on le met sous la forme $A+iB$ A & B ét. des fonct. ent. les cos & sin θ, θ', θ''

$\cos(\theta+\theta'+\theta''+\ldots) = A$

$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\ldots) = B$

On aura ainsi le cos & le sin. de la somme de plusieurs arcs.

Mettons le cos en facteur

$$\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta')(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta'')\ldots$$

On a $(a+x)(x+b)\ldots(x+l) = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots S_n$

$(1+a)(1+b)\ldots(1+l) = 1 + S_1 + S_2 + \ldots S_n$

Posons $T_1 = \mathrm{tg}\,\theta + \mathrm{tg}\,\theta' + \ldots$

$T_2 = \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\theta' + \ldots$

On a $(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta)(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta')(1+i\,\mathrm{tg}\,\theta'') = 1 + iT_1 + i^2T_2 + \ldots + i^nT_n$

$= 1 + iT_1 - T_2 - iT_3 + T_4 + iT_5 - T_6 - \ldots$

$= (1 - T_2 + T_4 - \ldots) + i(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots)$

d'où $\cos(\theta+\theta'+\theta''+\ldots) = \cos\theta\cos\theta'\cos\theta''\ldots(1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots)$

$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\ldots) = \cos\theta\cos\theta'\cos\theta''\ldots(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 \ldots)$

$$\mathrm{tg}(\theta+\theta'+\theta''\ldots) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots}$$

Le sin & le cos s'expriment enfin en fonction & la tg^te en fonction rationnelle des tg^tes des arcs :

Formule de multiplication

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta = A + iB$ en posant $\cos m\theta = A$, $\sin m\theta = B$

Or $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos^m\theta - C_m^2\cos^{m-2}\sin^2\theta + C_m^4\cos^{m-4}\sin^4\theta - \ldots$

$+ i(C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta - C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \ldots)$

d'où $\cos m\theta = \cos^m\theta - C_m^2\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + C_m^4\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta - \ldots$

$\sin m\theta = C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta - C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$

$$\mathrm{tg}\,m\theta = \frac{C_m^1\,\mathrm{tg}\,\theta - C_m^3\,\mathrm{tg}^3\theta + \ldots}{1 - C_m^2\,\mathrm{tg}^2\theta + C_m^4\,\mathrm{tg}^4\theta - \ldots}$$