Algèbre. Tome III

Numéro d'inventaire : 2016.90.68
Type de document : travail d'élève
Période de création : 1er quart 20e siècle
Date de création : 1909 (entre) / 1910 (et)
Matériau(x) et technique(s) : papier
Description : Cahier cousu avec couverture en papier rose portant le tampon du lycée Janson de Sailly et les titres des leçons étudiées. Réglure double ligne 8 mm sans marge. MS encre noire et crayon rouge et bleu.
Mesures : hauteur : 22,3 cm ; largeur : 17,5 cm
Notes : Cours du lycée Janson de Sailly. Date estimée d'après le tome 1 Cahier de mathématiques (2016.90.49) et le tome 5 Cahier de mathématiques (2016.90.53).
Mots-clés : Calcul et mathématiques
Filière : Supérieure
Autres descriptions : Langue : français
Nombre de pages : Paginé
Commentaire pagination : 100 p.
ill.
Lieux : Paris

Export articles
PDF sub-titles

X.

Formule générale d'addition & de multiplication des arcs –

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')(\cos\theta'' + i\sin\theta'') = \cos(\theta+\theta'+\theta'') + i\sin(\theta+\theta'+\theta'')$

Dével. le prod. on le met sous la forme $A+iB$, A & B ét. des fonct. ent. l'les $\cos\theta$ $\sin\theta$, $\cos\theta'$ $\sin\theta'$, $\cos\theta''$ $\sin\theta''$

$$\cos(\theta+\theta'+\theta''+\dots) = A$$
$$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\dots) = B$$

On aura ainsi le cos & le sin. de la somme de plusieurs arcs.

– Mettons le cos en facteur

$$\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''(1+i\,tg\,\theta)(1+i\,tg\,\theta')(1+i\,tg\,\theta'')\dots$$

On a $(x+a)(x+b)\dots(x+l) = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} \dots S_n$

$$(1+a)(1+b)\dots(1+l) = 1 + S_1 + S_2 + \dots S_n$$

Posons
$$T_1 = tg\,\theta + tg\,\theta' + \dots$$
$$T_2 = tg\,\theta\, tg\,\theta' + \dots$$

On a
$$(1+i\,tg\,\theta)(1+i\,tg\,\theta')(1+i\,tg\,\theta'') = 1 + iT_1 + i^2T_2 + \dots + i^nT_n$$
$$= 1 + iT_1 - T_2 - iT_3 + T_4 + iT_5 - T_6 \dots$$
$$= (1 - T_2 + T_4 - \dots) + i(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \dots)$$

D'où
$$\cos(\theta+\theta'+\theta''+\dots) = \cos\theta\cos\theta'\cos\theta''\dots(1 - T_2 + T_4 - T_6 + \dots)$$
$$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\dots) = \cos\theta\cos\theta'\cos\theta''\dots(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 \dots)$$
$$tg(\theta+\theta'+\theta''\dots) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \dots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 + \dots}$$

Le sin & le cos s'expriment enfin entière & la tgte en fonctions rationnelles des tgtes des arcs :

Formule de multiplication

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta = A + iB$ en posant $\cos m\theta = A$, $\sin m\theta = B$

Or
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos^m\theta - C_m^2\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + C_m^4\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta \dots$$
$$+ i(C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta - C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \dots)$$

D'où
$$\cos m\theta = \cos^m\theta - C_m^2\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + C_m^4\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta \dots$$
$$\sin m\theta = C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta - C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \dots$$
$$tg\, m\theta = \frac{C_m^1 tg\,\theta - C_m^3 tg^3\theta + \dots}{1 - C_m^2 tg^2\theta + C_m^4 tg^4\theta - \dots}$$